

練習問題4 (数学3B・レポート提出用)

1 以下で定められる関数 f が区間 I で一様連続であるかどうかを判定せよ.

(1) $f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad I = (0, \infty)$

(2) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad I = (0, 1]$

(3) $f(x) = x^2, \quad I = [0, \infty)$

2 非負整数 n に対して, $J_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ とおく. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} \quad (n \geq 2)$ が成り立つことを示せ.

(2) J_n を求めよ.

(3) $J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1} \quad (n \geq 1)$ が成り立つことを示し, (2) の結果を用いて次の Wallis (ウォリス) の公式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{\sqrt{n} (2n)!} = \sqrt{\pi}$ を証明せよ.