練習問題８ (数学解析第１)　　　　Jun. 5, 2019 (Wed.)

$\boxed{1}$ $f \in C([a,b])$，$K \in C([a,b] \times [a,b])$，$\lambda \in \mathbf{R}$ とし，次の $u = u(x)$ を未知関数とする Fredholm の積分方程式

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y + f(x), \quad x \in [a,b] \tag{$*$}$$

を考える．$u, v \in C([a,b])$ に対して，距離 $d(u,v)$ を

$$d(u,v) := \max_{a \le x \le b} |u(x) - v(x)|$$

により定めると，$\bigl(C([a,b]), d\bigr)$ は完備距離空間となる．$u \in C([a,b])$ に対して，$[a,b]$ 上の関数 Tu を

$$(Tu)(x) := \lambda \int_a^b K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y + f(x), \quad x \in [a,b]$$

により定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) T は $C([a,b])$ からそれ自身への写像になること（すなわち，$u \in C([a,b])$ ならば $Tu \in C([a,b])$ となること）を示せ．ただし，有界閉集合 $[a,b] \times [a,b]$ 上の連続関数は一様連続になることを証明抜きで用いてもよい．

(2) $M := \max\{|K(x,y)| \mid x, y \in [a,b]\}$ とおく．もし $M(b-a)|\lambda| < 1$ ならば，T は $\bigl(C([a,b]), d\bigr)$ からそれ自身への縮小写像になることを示せ.（したがって縮小写像の原理により，Fredholm の積分方程式 $(*)$ はただ１つの解 $u \in C([a,b])$ を持つ.）

中間試験のお知らせ

- 試験日・時間：６月１２日（水）１０時４５分〜１２時１５分
- 試験場所：第４校舎３３教室（講義と同じ部屋）