練習問題 4 (数学解析第 1)　　May 8, 2019 (Wed.)

$\boxed{1}$ 正の実数 x, y, z に対して，関数 f および g を

$$f(x,y,z) = x^x y^y z^z - 1, \qquad g(x,y,z) = z\sin\bigl(\pi x\cos(\pi y)\bigr)$$

で定義する．このとき，陰関数定理より $z=1$ の近傍で定義された滑らかな関数 φ および ψ が存在して

$$\begin{cases} f\bigl(\varphi(z),\psi(z),z\bigr) \equiv g\bigl(\varphi(z),\psi(z),z\bigr) \equiv 0, \\ \varphi(1) = \psi(1) = 1 \end{cases}$$

が成り立つ．

(1) 上の記述において陰関数定理が用いられているが，その定理を適用するための仮定が満たされていることを説明せよ．

(2) $\varphi'(1)$ および $\psi'(1)$ を求めよ．

(3) φ および ψ を $z=1$ のまわりで Taylor 展開して

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= a_0 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + O((z-1)^3) \\ \psi(z) &= b_0 + b_1(z-1) + b_2(z-1)^2 + O((z-1)^3) \qquad (z \to 1) \end{aligned}$$

とするとき，係数 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ の値を求めよ．

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ (縦ベクトル)，$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ を multi-index，$f = f(\boldsymbol{x}) \in C^2(\mathbf{R}^n)$，$H_f(\boldsymbol{x})$ を f の Hesse 行列とする．このとき，任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ (縦ベクトル) に対して，

$$\sum_{|\alpha|=2} \frac{f^{(\alpha)}(\boldsymbol{a})}{\alpha!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^\alpha = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \cdot \bigl(H_f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\bigr)$$

が成り立つことを確かめよ．