$\boxed{1}$ $\mathbf{R}^2$ 上の関数 $f = f(x,y)$ を

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - x^2 - xy - y^2 + x + y - 1$$

により定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $(x,y) = (1,1)$ の近傍で，方程式 $f(x,y) = 0$ により陰関数 $y = \varphi(x)$ が定めること（つまり，陰関数定理の仮定が満たされていること）を示し，$\varphi'(1)$ を求めよ．

(2) (1) の陰関数 $\varphi(x)$ を Taylor 展開して

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + O((x-1)^3) \qquad (x \to 1)$$

とするとき，係数 a_0, a_1, a_2 の値を求めよ．

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ $\bigl(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x})),\ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n\bigr)$ および $\boldsymbol{g} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^l$ $\bigl(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = (g_1(\boldsymbol{y}), \ldots, g_l(\boldsymbol{y})),\ \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m\bigr)$ は C^1 級であるとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 合成関数 $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ の Jacobi 行列 $D(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})$ に対して

$$D(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n = m = l$ のとき，合成関数 $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ の Jacobian $J_{\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}}$ に対して

$$J_{\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) = J_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$$

が成り立つことを示せ．

数学解析第１のＨＰのＵＲＬ

http://www.math.keio.ac.jp/~iguchi/Lectures/MA_2019.html