練習問題 8 (関数方程式概論)　　　　Jun. 13, 2019 (Thu.)

$\boxed{1}$ 次の 1 次元双曲型保存則を考える．

$$u_t + f(u)_x = 0$$

ただし，$f \in C^\infty(\mathbf{R})$ である．u_∞ を定数とするとき，$u = u_\infty$ は一つの解である．上の方程式をこの定数定常解の周りで線形化せよ．

$\boxed{2}$ 次の非圧縮性粘性流体に対する Navier–Stokes 方程式を考える．

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p = \nu \Delta \boldsymbol{u} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{u}_\infty$ を定数ベクトル，p_∞ を定数とするとき，$(\boldsymbol{u}, p) = (\boldsymbol{u}_\infty, p_\infty)$ は一つの解である．上の Navier–Stokes 方程式をこの定数定常解の周りで線形化せよ．

$\boxed{3}$ 次の非線形 Schrödinger 方程式を考える．

$$\mathrm{i}u_t + \Delta u + |u|^2 u = 0$$

a を任意の複素定数，$\phi(t) = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}|a|^2 t}$ とするとき，$u(x,t) = \phi(t)$ は一つの解である．上の非線形 Schrödinger 方程式をこの解の周りで線形化せよ．