練習問題 4 (関数方程式概論)　　　　May 9, 2019 (Thu.)

$\boxed{1}$ 次の $u = u(x,t)$ $(x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n, t > 0)$ に対する熱方程式を考える．

$$u_t = \kappa \Delta u \tag{0.1}$$

ただし，κ は正定数である．また，関数 $u(x,t)$ および $\lambda > 0$ に対して，関数 $u_\lambda(x,t)$ を $u_\lambda(x,t) := \lambda^n u(\lambda x, \lambda^2 t)$ で定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) u が熱方程式 (0.1) の解であれば，u_λ も熱方程式 (0.1) の解であり，次式が成り立つこと（すなわち，総熱量が不変であること）を示せ．

$$\int_{\mathbf{R}^n} u_\lambda(x,t)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} u(x,\lambda^2 t)\mathrm{d}x$$

(2) 任意の $\lambda > 0$ に対して $u_\lambda = u$ を満たす熱方程式 (0.1) の解 u を自己相似解と呼ぶ．(0.1) の自己相似解 u で x に関して球対称であるような解は，半直線上 $[0,\infty)$ の関数 $\phi(r)$ を用いて，$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}^n}\phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)$ と書けることを示し，さらに $\phi(r)$ が満たす常微分方程式を導け．

(3) 熱方程式 (0.1) の x に関して球対称であるような自己相似解で，かつ $x = 0$ で滑らかであるものを全て求めよ．