練習問題 2 (関数方程式概論)　　　　Apr. 18, 2019 (Thu.)

$\boxed{1}$ 次の $u = u(x,t)$ に対する熱方程式の初期値–境界値問題を考える．

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t) & x > 0, t > 0, \\ u = \varphi(t) & x = 0, t > 0, \\ u = u_0(x) & x > 0, t = 0. \end{cases}$$

ただし，$f \in C^\infty([0,\infty) \times [0,\infty))$, $\varphi, u_0 \in C^\infty([0,\infty))$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) この初期値–境界値問題の解 u で $u \in C^0([0,\infty) \times [0,\infty))$ を満たすもの（i.e., $x = 0, t = 0$ まで込めて連続である解）が存在するための必要条件を求められるだけ求めなさい．

(2) この初期値–境界値問題の解 u で $u \in C^2([0,\infty) \times [0,\infty))$ を満たすもの（i.e., $x = 0, t = 0$ まで込めて u およびその 1 階と 2 階の偏導関数が全て連続である解）が存在するための必要条件を求められるだけ求めなさい．

(3) この初期値–境界値問題の解 u で $u \in C^\infty([0,\infty) \times [0,\infty))$ を満たすもの（i.e., $x = 0, t = 0$ まで込めて u およびその全ての偏導関数が連続である解）が存在するための必要条件を求められるだけ求めなさい．

関数方程式概論のＨＰのＵＲＬ

http://www.math.keio.ac.jp/~iguchi/Lectures/FE_2019.html