数学解析第 1　第 8 回講義ノート

以上の準備の下，2 変数関数に対する陰関数定理を証明しよう．念のため，ここで陰関数定理を再掲載しておく．

定理 2.1（陰関数定理）Ω を $\mathbf{R}^2$ の領域，$(a,b) \in \Omega$，$f(x,y)$ を Ω で定義された C^1 級の実数値関数とする．このとき，

$$f(a,b) = 0 \quad \text{および} \quad f_y(a,b) \neq 0$$

ならば，方程式

$$f(x,y) = 0$$

は (a,b) のある近傍で y について一意に解ける．すなわち,（十分小さな）正数 r, δ および開区間 $(a-r, a+r)$ で定義された C^1 級関数 φ が存在し，以下の性質を満たす．

(1)　$f(x,\varphi(x)) = 0,\ |\varphi(x) - b| < \delta\ (|x-a| < r), \quad \varphi(a) = b$

(2)　$f(x,y) = 0, |x-a| < r, |y-b| < \delta \Rightarrow y = \varphi(x)$

(3)　$\varphi'(x) = -\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$

(4)　f が C^k 級（$k \geq 2$）ならば，陰関数 φ もまた C^k 級

証明　$f(x,y)$ の代わりに $\tilde{f}(x,y) := f(x+a, y+b)$ を考察することにより，一般性を失うことなく，$(a,b) = (0,0)$ の場合を証明すれば十分である．したがって，以下では $(a,b) = (0,0)$ と仮定する.（勿論，このような簡略化を行わなくても証明することができるが，式の記述が長くなってしまう.）このとき，定理の仮定より

$$f(0,0) = 0 \quad \text{および} \quad f_y(0,0) \neq 0$$

が成り立っている．実定数 A および Ω 上の実数値関数 $G(x,y)$ を

$$A := \frac{1}{f_y(0,0)} \quad \text{および} \quad G(x,y) := y - Af(x,y)$$

により定義する．仮定より，G は Ω 上の C^1 級関数になり，

$$\begin{aligned} f(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y = G(x,y) \\ &\Leftrightarrow \quad y \text{ は } G(x,\cdot) \text{ の不動点} \end{aligned}$$

となる．

注意　このようにして，方程式の根を求める問題は関数 $G(x,\cdot)$ の不動点を求める問題に帰着されたのであるが，何故このような関数 $G(x,y)$ を導入したのか不思議に思う人もいるであろう．縮小写像の原理での証明を真似て反復法により不動点 y を求めるとすれば，

$$y_{n+1} = G(x,y_n) = y_n - \frac{f(x,y_n)}{f_y(0,0)}$$

により近似根 $\{y_n\}$ を求め，その極限として不動点を求めることになる．この近似アルゴリズムは，分母の値が $f_y(x,y_n)$ ではなく $f_y(0,0)$ という値が使われているが，x をパラメーターとした Newton 法に他ならないことが分かる．

定理 2.1 の証明に戻ろう．3 つのステップに分けて証明する．

Step 1　十分小さな正数 r および δ が存在し，

(1)　$|x| \leq r,\ |y| \leq \delta \ \Rightarrow\ |G(x,y)| \leq \delta$

(2)　$|x| \leq r,\ |y_1|, |y_2| \leq \delta \ \Rightarrow\ |G(x,y_1) - G(x,y_2)| \leq \frac{1}{2}|y_1 - y_2|$

が成り立つことを示そう．

$$\begin{aligned} G(x,y_1) - G(x,y_2) &= y_1 - y_2 - A(f(x,y_1) - f(x,y_2)) \\ &= A\{f_y(0,0)(y_1 - y_2) - (f(x,y_1) - f(x,y_2))\} \end{aligned}$$

ここで，微分積分学の基本定理および合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} f(x,y_1) - f(x,y_2) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x, ty_1 + (1-t)y_2)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f_y(x, ty_1 + (1-t)y_2)\,\mathrm{d}t\,(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

であるから，

$$G(x,y_1) - G(x,y_2) = A\int_0^1 \{f_y(0,0) - f_y(x, ty_1 + (1-t)y_2)\}\mathrm{d}t\,(y_1 - y_2)$$

が成り立つ．一方，f_y は $(0,0)$ で連続であるから，十分小さな正数 δ が存在し

$$|x| \leq \delta,\ |y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f_y(0,0) - f_y(x,y)| \leq \frac{1}{2|A|}$$

が成り立つ．したがって，$|x| \leq \delta$，$|y_1|, |y_2| \leq \delta$ ならば，$0 \leq t \leq 1$ を満たす任意の t に対して

$$|ty_1 + (1-t)y_2| \leq t|y_1| + (1-t)|y_2| \leq t\delta + (1-t)\delta = \delta$$

が成り立つので，

$$|f_y(0,0) - f_y(x, ty_1 + (1-t)y_2)| \leq \frac{1}{2|A|} \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

となり，

$$\begin{aligned} |G(x,y_1) - G(x,y_2)| &\leq |A| \int_0^1 |f_y(0,0) - f_y(x, ty_1 + (1-t)y_2)|\mathrm{d}t\,|y_1 - y_2| \\ &\leq |A| \int_0^1 \frac{1}{2|A|}\mathrm{d}t\,|y_1 - y_2| = \frac{1}{2}|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，仮定より $G(0,0) = 0$ であるから，G の $(0,0)$ における連続性より，十分小さな正数 $r \in (0, \delta]$ が存在して

$$|x| \leq r \ \Rightarrow\ |G(x,0)| = |G(x,0) - G(0,0)| \leq \frac{\delta}{2}$$

が成り立つ．したがって，$|x| \leq r$，$|y| \leq \delta$ ならば

$$\begin{aligned} |G(x,y)| &\leq |G(x,y) - G(x,0)| + |G(x,0)| \\ &\leq \frac{1}{2}|y| + \frac{\delta}{2} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

となり，望みの主張が示された．

Step 2 次に，集合 X および集合 X 上の距離 d を次式で定義しよう．

$$X := \left\{\varphi \in C([-r,r]) \mid \max_{|x|\le r}|\varphi(x)| \le \delta,\ \varphi(0)=0\right\}$$
$$d(\varphi,\psi) := \max_{|x|\le r}|\varphi(x)-\psi(x)| \qquad (\varphi,\psi \in X)$$

このとき，(X,d) は完備距離空間になる．実際，距離空間になることは明らかであろう．完備性を証明するために，$\{\varphi_n\}$ を (X,d) における Cauchy 列とする．X は $C([-r,r])$ の部分集合であることから，$\{\varphi_n\}$ は距離空間 $(C([-r,r]),d)$ における Cauchy 列になっていることが分かる．ところが，定理 5.1 より $(C([-r,r]),d)$ は完備であるから，ある連続関数 $\varphi \in C([-r,r])$ が存在し，

$$d(\varphi_n,\varphi) = \max_{|x|\le r}|\varphi_n(x)-\varphi(x)| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

が成り立つ．すなわち，$\{\varphi_n\}$ は φ に一様収束している．一方，$\varphi_n \in X$ より

$$|\varphi_n(x)| \le \delta \quad (|x|\le r) \quad \text{および} \quad \varphi_n(0)=0$$

が成り立っているので，ここで $n\to\infty$ とすれば

$$|\varphi(x)| \le \delta \quad (|x|\le r) \quad \text{および} \quad \varphi(0)=0$$

となり，$\varphi \in X$ となる．これは，距離空間 (X,d) が完備であることを示している．

さて，$\varphi \in X$ に対して区間 $[-r,r]$ 上の関数 $T\varphi$ を

$$(T\varphi)(x) := G(x,\varphi(x)) \qquad (|x|\le r)$$

により定めよう．このとき，写像 T は X から X への縮小写像になる．実際，$\varphi \in X$ とすると，$\varphi \in C([-r,r])$ より $T\varphi \in C([-r,r])$ となることは明らかであろう．また，$\varphi(0)=0$ より

$$(T\varphi)(0) = G(0,\varphi(0)) = G(0,0) = 0$$

が成り立つ．さらに，$|x|\le r$ のとき $|\varphi(x)|\le\delta$ であるから，Step 1 の (1) より，$|G(x,\varphi(x))| \le \delta$ となり，

$$\max_{|x|\le r}|(T\varphi)(x)| \le \delta$$

が成り立ち，$T\varphi \in X$ となることが分かる．したがって，T は X から X への写像になっている．これが縮小写像になっていることは，次のようにして分かる．$\varphi,\psi \in X$ とすると，$|x|\le r$ を満たす任意の x に対して，$|\varphi(x)|\le\delta, |\psi(x)|\le\delta$ であるから，Step 1 の (2) より

$$\begin{aligned}|(T\varphi)(x)-(T\psi)(x)| &= |G(x,\varphi(x))-G(x,\psi(x))| \\ &\le \frac{1}{2}|\varphi(x)-\psi(x)|\end{aligned}$$

となり，

$$\max_{|x|\le r}|(T\varphi)(x)-(T\psi)(x)| \le \frac{1}{2}\max_{|x|\le r}|\varphi(x)-\psi(x)| \qquad \therefore \quad d(T\varphi,T\psi) \le \frac{1}{2}d(\varphi,\psi)$$

が成り立つ．以上のことから，T が X から X への縮小写像であることが分かった．距離空間 (X,d) は完備であるから，縮小写像の原理（定理 5.2）を適用することができ，T は X において唯一つの不動点 $\varphi \in X$ を持つことが分かる．

$$\begin{aligned} T\varphi = \varphi \quad &\Leftrightarrow \quad G(x,\varphi(x)) = \varphi(x) \quad (|x| \le r) \\ &\Leftrightarrow \quad f(x,\varphi(x)) = 0 \quad (|x| \le r) \end{aligned}$$

に注意すれば，この関数 φ が望みの陰関数であり，定理 2.1 の (1) および (2) を満たすことが分かる．

Step 3 いま求めた陰関数 φ が C^1 級であることを示すことが残っている．(それが示されれば，定理 2.1 の (3) および (4) が成り立つことは明らかであろう．）$|x| < r$ を満たす x を任意に固定しよう．Step 1 での計算より，

$$|f_y(x,\varphi(x))| \ge |f_y(0,0)| - |f_y(x,\varphi(x)) - f_y(0,0)| \ge \frac{1}{|A|} - \frac{1}{2|A|} = \frac{1}{2|A|} > 0$$

特に，$f_y(x,\varphi(x)) \ne 0$ が成り立っていることに注意する．そこで，

$$p := -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$$

とおき，

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = p$$

となることを示そう．f が C^1 級であることから，Taylor の定理より，十分小さな任意の実数 h,k に対して

$$\begin{aligned} f(x+h,\varphi(x)+k) &= f(x,\varphi(x)) + f_x(x,\varphi(x))h + f_y(x,\varphi(x))k + R(h,k) \\ &= f_x(x,\varphi(x))h + f_y(x,\varphi(x))k + R(h,k) \end{aligned}$$

ただし，

$$\frac{R(h,k)}{|h|+|k|} \to 0 \qquad (|h|+|k| \to 0)$$

が成り立つ．上の計算では $\varphi(x)$ が陰関数であることを用いた．したがって，任意の正数 ε に対して，十分小さな正数 δ_0 が存在して，$|h|,|k| \le \delta_0$ を満たす任意の実数 h,k に対して

$$|f(x+h,\varphi(x)+k) - f_x(x,\varphi(x))h - f_y(x,\varphi(x))k| \le \varepsilon(|h|+|k|)$$

が成り立つ．一方，φ の x における連続より，この正数 δ_0 に対して十分小さな正数 $r_0 \in (0,\delta_0]$ が存在して，

$$|h| \le r_0 \quad \Rightarrow \quad |\varphi(x+h)-\varphi(x)| \le \delta_0$$

が成り立つ．そこで，

$$\Delta_h\varphi := \varphi(x+h) - \varphi(x)$$

とおくと，$|h| \le r_0$ であるかぎり $|\Delta_h\varphi| \le \delta_0$ となり，上式において $k = \Delta_h\varphi$ とすることができる．このとき，

$$f(x+h,\varphi(x)+k) = f(x+h,\varphi(x+h)) = 0$$

となることに注意すれば，

$$|h| \leq r_0 \quad \Rightarrow \quad |f_x(x,\varphi(x))h + f_y(x,\varphi(x))\Delta_h\varphi| \leq \varepsilon(|h| + |\Delta_h\varphi|)$$

が成り立つ．また，先の計算より

$$\frac{1}{|f_y(x,\varphi(x))|} \leq 2|A|$$

も成り立っている．したがって，$|h| \leq r_0$ であれば

$$\begin{aligned}
|\Delta_h\varphi - ph| &= |\Delta_h\varphi + \frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}h| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{|f_y(x,\varphi(x))|}(|h| + |\Delta_h\varphi|) \\
&\leq 2|A|\varepsilon(|h| + |\Delta_h\varphi|) \\
&\leq 2|A|\varepsilon(|h| + |\Delta_h\varphi - ph| + |ph|) \\
&\leq 2|A|\varepsilon|\Delta_h\varphi - ph| + 2|A|(1+|p|)|h|\varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$2|A|\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ であれば，上式の右辺第一項目を左辺に移項することにより

$$|\Delta_h\varphi - ph| \leq 4|A|(1+|p|)|h|\varepsilon$$

が成り立つ．以上のことをまとめると，任意の正数 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4|A|}]$ に対して，十分小さな正数 r_0 が存在し，$0 < |h| \leq r_0$ を満たす任意の実数 h に対して

$$\left|\frac{\Delta_h\varphi}{h} - p\right| \leq 4|A|(1+|p|)\varepsilon$$

が成り立つ．これは

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h\varphi}{h} = p = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$$

となることを示している．したがって，φ は x において微分可能であり，

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$$

となることが分かる．この式の右辺は x の連続関数であるから，φ も C^1 級であることが示された．（証明終）