数学解析第１　第７回講義ノート

次に，関数列あるいは関数項級数の一様収束性を判定するための定理を紹介しよう．１年次に学んだように，数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は，$\{a_n\}$ が Cauchy 列であることであった．その定理を関数列 $\{f_n\}$ の一様収束性に拡張したものが次の定理である．

定理 4.6 区間 I で定義された関数列 $\{f_n\}$ が一様収束するための必要十分条件は，任意の正数 ε に対してある自然数 n_0 が存在し，$n, m \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n, m および任意の $x \in I$ に対して

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

が成り立つことである．

証明　（必要条件）$f_n \to f$（一様）とすると，任意の正数 ε に対して，ある自然数 n_0 が存在して，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n_0 および任意の $x \in I$ に対して

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．したがって，$n, m \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n, m および任意の $x \in I$ に対して

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |\bigl(f_n(x) - f(x)\bigr) - \bigl(f_m(x) - f(x)\bigr)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ．

（十分条件）仮定より，任意の $x \in I$ に対して，実数列 $\{f_n(x)\}$ は Cauchy 列であることが分かる．したがって，実数の完備性より $\{f_n(x)\}$ は収束する．そこで，I 上の関数 f を

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad (x \in I)$$

により定めよう．仮定より，任意の正数 ε に対して，ある自然数 n_0 が存在して，$n, m \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n, m および任意の $x \in I$ に対して

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

が成り立っている．この式において $m \to \infty$ とすれば，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n および任意の $x \in I$ に対して

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

が成り立つことが分かる．これは $\{f_n\}$ が f に一様収束することを示している．（証明終）

注意　この定理における条件を書き直すと，次のようになる．すなわち，区間 I で定義された関数列 $\{f_n\}$ が一様収束するための必要十分条件は，

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

が成り立つことである．

関数列 $\{f_n\}$ の第 n 部分和からなる関数列 $\{s_n\}$ に対して定理 4.6 を適用すれば次の定理が得られる．

定理 4.7　区間 I で定義された関数項級数 $\sum f_n$ が一様収束するための必要十分条件は，任意の正数 ε に対してある自然数 n_0 が存在し，$n > m \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n, m および任意の $x \in I$ に対して

$$|f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \cdots + f_n(x)| < \varepsilon$$

が成り立つことである．

証明　$s_n(x) := f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ を第 n 部分和とすると，関数項級数 $\sum f_n$ が一様収束するための必要十分条件は，定義より，関数列 $\{s_n\}$ が一様収束することである．また定理 4.6 より，関数列 $\{s_n\}$ が一様収束するための必要十分条件は，任意の正数 ε に対してある自然数 n_0 が存在し，$n > m \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n, m および任意の $x \in I$ に対して

$$|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$$

が成り立つことである．ここで，

$$s_n(x) - s_m(x) = f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \cdots + f_n(x)$$

に注意すれば望みの主張が従う．(証明終)

与えられた関数項級数が一様収束するかどうかの判定法として，次の定理がとても便利である．

定理 4.8（Weierstrass の M 判定法）　区間 I で定義された関数列 $\{f_n\}$ に対して次の 2 条件を満たす数列 $\{M_n\}$ が存在するとする．

(1)　$|f_n(x)| \leq M_n$ $(\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbf{N})$
(2)　$\sum M_n$ は収束する

このとき，関数項級数 $\sum f_n$ は一様収束する．

証明　任意の正数 ε に対して，仮定 (2) より，ある自然数 n_0 が存在し，$n > m \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n, m に対して

$$M_{m+1} + M_{m+2} + \cdots + M_n < \varepsilon$$

が成り立つ．したがって，$n > m \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n, m および任意の $x \in I$ に対して，仮定 (1) より

$$\begin{aligned}|f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \cdots + f_n(x)| &\leq |f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \cdots + |f_n(x)| \\ &\leq M_{m+1} + M_{m+2} + \cdots + M_n \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

となる．それゆえ，定理 4.7 より関数項級数 $\sum f_n$ は一様収束する．(証明終)

5　陰関数定理の証明

この節では，2 変数関数に対する陰関数定理（定理 2.1）を証明する．多変数関数に対する陰関数定理（定理 2.2）も同様にして証明できるが，記号が複雑になるため割愛することにする．陰関数定理の証明では，陰関数を構成していくことになるが，そのために陰関数の近似関数を構成し，その近似関数列の極限関数が望みの陰関数になることを示す．その近似関数列の構成法は，本質的には Newton 法と呼ばれる数値計算アルゴリズムである．また，その近似関数列の収束性を証明する際，不動点定理の一つである縮小写像の原理を用いる．これらを説明した後，陰関数定理を証明する．

関数空間 $\boldsymbol{C([a,b])}$　閉区間 $[a,b]$ 上で定義された実数値連続関数全体の集合を $C([a,b])$ と書いた．$f,g\in C([a,b])$ および $c\in\mathbf{R}$ に対して，和 $f+g$ およびスカラー倍 cf を

$$(f+g)(x):=f(x)+g(x),\quad (cf)(x):=cf(x)\qquad (a\le x\le b)$$

により定義すると，$C([a,b])$ はベクトル空間（線形空間）になる．つまり，これらの和およびスカラー倍はベクトル空間の公理を満たす．$C([a,b])$ を書くときは，通常，このベクトル空間のことを指す．

$f\in C([a,b])$ とすると，x の関数 $|f(x)|$ は閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数になるので最大値をもつ．その最大値を次の記号で記すことにする．

$$\|f\|:=\max_{a\le x\le b}|f(x)|$$

このとき，容易に確かめられるように，$\|\cdot\|$ はベクトル空間 $C([a,b])$ 上のノルムとなる．すなわち，次の性質を満たす．

(1)　$\|f\|\ge 0$ および $\|f\|=0\Leftrightarrow f=0$
(2)　$\|cf\|=|c|\|f\|$
(3)　$\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$

したがって，$f,g\in C([a,b])$ に対して，d を

$$d(f,g):=\|f-g\|=\max_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|$$

と定めると，d はベクトル空間 $C([a,b])$ 上の距離になることが分かる．すなわち，d は次の性質を満たす．

(1)　$d(f,g)\ge 0$ および $d(f,g)=0\Leftrightarrow f=g$
(2)　$d(f,g)=d(g,f)$
(3)　$d(f,g)\le d(f,h)+d(h,g)$

この距離空間が完備になることを示そう．その完備性が陰関数定理の証明に重要な役割を果たす．

定理 5.1　距離空間 $\big(C([a,b]),d\big)$ は完備である．

証明 $\{f_n\}$ を $\big(C([a,b]),d\big)$ における Cauchy 列とする．すなわち，

$$\max_{a\le x\le b}|f_n(x)-f_m(x)|=d(f_n,f_m)\to 0 \quad (n,m\to\infty)$$

とする．このとき，定理 4.6 の証明の後ろで与えた注意より，$\{f_n\}$ はある関数 f に一様収束する．ここで，$\{f_n\}$ は連続な関数列であったから，定理 4.1 より，極限関数 f もまた $[a,b]$ で連続であり，

$$d(f_n,f)=\max_{a\le x\le b}|f_n(x)-f(x)|\to 0 \quad (n\to\infty)$$

が成り立つ．したがって，$\big(C([a,b]),d\big)$ は完備である．（証明終）

縮小写像の原理を紹介するために，幾つかの言葉を定義しよう．

定義 5.1 (X,d) を距離空間とし，T を X から X への写像とする．

(1) 写像 T が**縮小写像**であるとは，$0\le\theta<1$ を満たす定数 θ が存在し，任意の $f,g\in X$ に対して $d(Tf,Tg)\le\theta d(f,g)$ が成り立つときをいう．
(2) $f\in X$ が T の**不動点**であるとは，$Tf=f$ が成り立つときをいう．

注意 任意の $f,g\in X$ に対して $d(Tf,Tg)<d(f,g)$ が成り立っていても必ずしも縮小写像にはならない．写像 T で写すことにより，2 点間の距離 $d(f,g)$ は 1 より真に小さな一定の比率 θ 以下で小さくならなければ縮小写像とは呼ばないのである．

定理 5.2（縮小写像の原理） (X,d) を完備距離空間，T を X から X への縮小写像とする．このとき，写像 T の不動点 $f_0\in X$ が唯一つ存在する．さらに，任意の $f\in X$ に対して，$\lim_{n\to\infty}T^nf=f_0$ が成り立つ．ただし，T^nf は $T^nf=T(T^{n-1}f)$ により帰納的に定義される X の要素である．

証明 任意に $f\in X$ を固定し，各自然数 n に対して $f_n:=T^nf$ により距離空間 X 内の点列 $\{f_n\}$ を定義する．仮定より T は縮小写像であるから，$0\le\theta<1$ を満たす定数 θ が存在し，任意の $f,g\in X$ に対して

$$d(Tf,Tg)\le\theta d(f,g)$$

が成り立っている．この関係式を帰納的に用いると，

$$\begin{aligned}d(T^nf,T^ng)&=d(T(T^{n-1}f),T(T^{n-1}g))\le\theta d(T^{n-1}f,T^{n-1}g)\\&\le\theta^2d(T^{n-2}f,T^{n-2}g)\le\theta^3d(T^{n-3}f,T^{n-3}g)\\&\le\cdots\le\theta^nd(f,g)\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．特に，任意の自然数 n に対して

$$d(f_n,f_{n+1})=d(T^nf,T^n(Tf))\le\theta^nd(f,Tf)$$

が成り立つ．さらに，距離 d に対する三角不等式を帰納的に用いると，

$$\begin{aligned}
d(f_n, f_{n+m}) &\leq d(f_n, f_{n+1}) + d(f_{n+1}, f_{n+m}) \\
&\leq d(f_n, f_{n+1}) + d(f_{n+1}, f_{n+2}) + d(f_{n+2}, f_{n+m}) \\
&\leq \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&\leq d(f_n, f_{n+1}) + d(f_{n+1}, f_{n+2}) + \cdots + d(f_{n+m-1}, f_{n+m}) \\
&\leq (\theta^n + \theta^{n+1} + \cdots + \theta^{n+m-1}) d(f, Tf) \\
&\leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(f, Tf) \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

となり，点列 $\{f_n\}$ は Cauchy 列であることが分かる．仮定より，距離空間 (X, d) は完備であるから，点列 $\{f_n\}$ は収束することが分かる．その極限を f_0 と定めよう．このとき，$d(f_n, f_0) \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立っている．したがって，等式 $f_{n+1} = Tf_n$ において $n \to \infty$ とすれば，$f_0 = Tf_0$ が得られる.（ここで，縮小写像は連続写像になることを暗黙のうちに使用した．ただし，その証明は容易であるので問として残しておく.）以上のことから，f_0 が T の不動点であることが分かった．

次に，T の不動点の一意性を証明しよう．$f_0, g_0 \in X$ を共に T の不動点とすると，$f_0 = Tf_0$，$g_0 = Tg_0$ が成り立つ．したがって，$0 \leq \theta < 1$ に注意すれば，

$$d(f_0, g_0) = d(Tf_0, Tg_0) \leq \theta d(f_0, g_0) \qquad \therefore \quad 0 \leq (1-\theta) d(f_0, g_0) \leq 0$$

となり，$d(f_0, g_0) = 0$，それゆえ $f_0 = g_0$ が成り立つ．したがって，T の不動点は唯一つである.（証明終）

Newton 法　方程式

$$f(y) = 0$$

の根を計算するアルゴリズムの一つである Newton 法を紹介しよう．まず根の近似値 y_n が求まっているとする．この近似根 y_n を用いて，より精度の高い近似根 y_{n+1} を，yz 平面内の曲線 $z = f(y)$ の $(y_n, f(y_n))$ における接線と y 軸との交点として定義する．初期値 y_1 を適当に定めれば，これにより根の近似列 $\{y_n\}$ が定まるが，その極限値として真の根を求める方法が Newton 法である．上記接線の方程式は

$$z - f(y_n) = f'(y_n)(y - y_n)$$

であるから，近似根 y_{n+1} は $-f(y_n) = f'(y_n)(y_{n+1} - y_n)$，すなわち

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$

で定められる．

Newton 法は非常に高速な計算アルゴリズムとして知られている強力な数値計算法であるが，万能ではなく，初期値の選び方が悪いと収束しなかったり，また根に多重度があると，上式の分母の値が非常に小さくなり，収束が遅くなってしまうことが知られている．

なお，連立方程式

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$$

すなわち，

$$\begin{cases} f_1(y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0 \\ f_2(y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f_m(y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0 \end{cases}$$

の場合の Newton 法は

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n - \left(D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_n)\right)^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_n)$$

となる．ただし，ベクトルは全て縦ベクトルとして計算する．