数学解析第1　第2回講義ノート

命題 1.7（Cauchy–Schwarz の不等式）$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| \le \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \quad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n)$

証明　$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ のときは，両辺とも 0 になるので明らかに成り立つ．そこで，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ と仮定する．このとき，$\|\boldsymbol{x}\|>0$ であることに注意しよう．1 変数関数 $\phi(t)$ を $\phi(t) := \|t\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$ により定める．このとき，

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= \sum_{j=1}^{n}(tx_j-y_j)^2 = \sum_{j=1}^{n}(t^2x_j^2-2tx_jy_j+y_j^2)\\
&= t^2\sum_{j=1}^{n}x_j^2 - 2t\sum_{j=1}^{n}x_jy_j + \sum_{j=1}^{n}y_j^2\\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2t^2 - 2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})t + \|\boldsymbol{y}\|^2
\end{aligned}
$$

すなわち，$\phi(t)$ は非負の 2 次関数である．したがって，その判別式は 0 以下でなければならない．すなわち，

$$
\frac{\text{判別式}}{4} = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 \le 0 \qquad \therefore \quad (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2 \le \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2
$$

この最後の不等式の両辺の平方根をとれば，望みの不等式が従う.（証明終）

命題 1.8　$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\| \quad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n)$

証明　Cauchy–Schwarz の不等式を用いると，

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= \sum_{j=1}^{n}(x_j+y_j)^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{y}\|^2\\
&\le \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| + \|\boldsymbol{y}\|^2\\
&\le \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2\\
&= (\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)^2
\end{aligned}
$$

となり，平方根をとれば望みの不等式が従う.（証明終）

　これより，$\boldsymbol{x}$ のノルム $\|\boldsymbol{x}\|$ は次の性質を持つことが分かる．

(1)　$\|\boldsymbol{x}\|\ge 0$ および $\|\boldsymbol{x}\|=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$
(2)　$\|c\boldsymbol{x}\| = |c|\|\boldsymbol{x}\|$
(3)　$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$

余談になるが，数ベクトル空間とは限らないベクトル空間 V が与えられており，しかも V の各 $\boldsymbol{x}\in V$ に対して実数 $\|\boldsymbol{x}\|$ が定まっており，さらにそれが上記の性質を満たすとき，$\|\boldsymbol{x}\|$ を $\boldsymbol{x}$ のノルムと呼び，ノルムを備えたベクトル空間のことをノルム空間と呼ぶ．命題 1.7 および 1.8 の証明を反省してみると，内積空間 V が与えられその内積からノルムを $\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ で定めると，このノルムは上の (1)–(3) の性質を持つことが確かめられる．この意味で，内積空間はノルム空間になっている．

　さて，各 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$ に対して，ノルムを用いて $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ との距離を $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ で定める．このとき，ノルムに関する上記の性質 (1)–(3) を用いると次の性質が従う．

(1)　$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq 0$ および $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$
(2)　$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$
(3)　$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$

実際，(1) はノルムの性質 (1) から明らかであろう．また，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = (-1)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$ に注意してノルムの性質 (2) を用いると，

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \|(-1)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\| = |-1|\|(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\| = \|(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\| = d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$$

となり，(2) が成り立つことが分かる．最後に，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})$ に注意してノルムの性質 (3) を用いると

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})\| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\| = d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$$

となり，(3) が成り立つことが分かる．この証明では，ノルムの性質 (1)–(3) を用いているだけで，Euclid ノルム $\|\cdot\|$ の具体的な定義式を全く使っていないことに注意しよう．

上記の距離 $d(\cdot,\cdot)$ に関する性質 (1)–(3) は我々が素朴に距離と呼んでいるものが備えている本質的な性質であろう．そのことから，もっと抽象的な対象に対して距離というものを定義するのであれば，次の定義が自然であることが理解されよう．

定義 1.2　X を集合とし，各要素 $f,g \in X$ に対して実数 $d(f,g)$ が定まっており，任意の $f,g,h \in X$ に対して

(1)　$d(f,g) \geq 0$ および $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$　（正値性）
(2)　$d(f,g) = d(g,f)$　（対称性）
(3)　$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$　（三角不等式）

が成り立つとき，$d(f,g)$ を f と g との距離，d を集合 X 上の距離という．距離 d を備えた集合を距離空間といい (X,d) と書く．

上の議論から明らかなように，ノルム $\|\cdot\|$ を備えたノルム空間 V が与えられたとき，$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ と定めると，d は V 上の距離になる．この意味で，ノルム空間は距離空間になっている．しかし，この逆は成り立たないことに注意しよう．なぜならば，距離空間 X はベクトル空間である必要はなく，集合 X 上には必ずしも和やスカラー倍といった演算が定義されていなくてもよいからである．

ここで，何故このような抽象的な距離空間などという仰々しいものを定義したのであろうと疑問にもつ人も少なくないと思う．皆が素朴にイメージしている空間内の距離というものは Euclid 空間における Euclid の距離であると思うが，この講義を進めていくと，関数の集合というものを考えて，関数を空間内の点とみなし，関数と関数の距離というものを導入していくことになる．この講義で扱う抽象的な距離空間の具体例は，例えば，連続関数全体からなるベクトル空間やその部分集合である．

次に，距離空間 (X,d) における点列 $\{f_m\}$，すなわち，各自然数 $m \in \mathbf{N}$ に対して集合 X の要素 f_m が与えられているとき，この点列に対して収束という概念を定義しよう．その前に，実数列に関する基本事項を思い出しておこう．数列 $\{a_m\}$ が Cauchy 列（基本列）であるとは，

$$|a_m - a_l| \to 0 \quad (m,l \to \infty)$$

が成り立つときをいう．実数の完備性（連続性）より，数列 $\{a_m\}$ が収束列であることとCauchy 列であることは同値であった．

定義 1.3 (X,d) を距離空間，$\{f_m\}$ を X における点列，$f \in X$ とする．

(1) 点列 $\{f_m\}$ が f に収束するとは，実数列 $\{d(f_m,f)\}$ が 0 に収束するとき，すなわち，$d(f_m,f) \to 0$ $(m \to \infty)$ が成り立つときをいう．このとき，次のように書く．

$$\lim_{m\to\infty} f_m = f \quad \text{in} \quad X$$

(2) 点列 $\{f_m\}$ が Cauchy 列（基本列）であるとは，$d(f_m,f_l) \to 0$ $(m,l \to \infty)$ が成り立つときをいう．

(3) 距離空間 (X,d) が完備であるとは，X 内の任意の点列 $\{f_m\}$ に対して，$\{f_m\}$ が収束列であることと Cauchy 列であることが同値であるときをいう．

任意の距離空間において，収束列が Cauchy 列であることは明らかであろう．しかがって，この完備性は任意の Cauchy 列が収束列であることを主張している．この完備という性質は，解析学においては非常に重要な概念であり，これが無くなってしまうと解析学が立ち行かなくなってしまうと言っても過言ではない．この完備性が成り立つことを示そうと思うと，最終的には実数の完備性（連続性）に遡ることになる．次の命題の証明からもその一端が見えるであろう．

命題 1.9 n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ は完備である．

証明 まず，Euclid 空間において $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ との距離は $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ で与えられていたことを思い出そう．また，任意の $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して，

$$|x_j| \le \|\boldsymbol{x}\| \le |x_1| + \cdots + |x_n| \qquad (1 \le j \le n)$$

が成り立つことにも注意しよう．さて，$\{\boldsymbol{x}^{(m)}\}$ を Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ における Cauchy 列とし，$\boldsymbol{x}^{(m)} = (x_1^{(m)},\ldots,x_n^{(m)})$ とする．このとき，各 j $(1 \le j \le n)$ に対して

$$|x_j^{(m)} - x_j^{(l)}| \le \|\boldsymbol{x}^{(m)} - \boldsymbol{x}^{(l)}\| \to 0 \quad (m,l \to \infty)$$

となり，実数列 $\{x_j^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ は Cauchy 列であることが分かる．したがって，実数の完備性より実数列 $\{x_j^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ は収束する．その極限を α_j とおこう．すなわち，

$$\alpha_j := \lim_{m\to\infty} x_j^{(m)} \qquad (1 \le j \le n)$$

さらに，$\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbf{R}^n$ と定めると

$$\|\boldsymbol{x}^{(m)} - \boldsymbol{\alpha}\| \le |x_1^{(m)} - \alpha_1| + \cdots + |x_n^{(m)} - \alpha_n| \to 0 \quad (m \to \infty)$$

となり，点列 $\{\boldsymbol{x}^{(m)}\}$ は $\boldsymbol{\alpha}$ に収束することが分かる．したがって，Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ は完備である．（証明終）

2　陰関数定理とその応用

まず，陰関数定理というものを大雑把に紹介しよう．2 変数関数 $f(x,y)$ が与えられているとき，方程式

$$f(x,y)=0 \tag{2.1}$$

を考える．$x=a$ のとき，y についての方程式 $f(a,y)=0$ が $y=b$ という解を持っていたとしよう．そこで，x を a から少しだけずらしたとき，もし $f(x,y)$ が連続関数であれば，yz 平面における $z=f(x,y)$ のグラフも少しだけずれ，それゆえ，そのグラフと y 軸との交点も少しだけずれるであろう．その交点は x をパラメーターを見なしたときの y についての方程式 (2.1) の解のことである．それゆえ，x が a に十分近い場合，方程式 (2.1) は $y=\varphi(x)$ の形で解けるであろう．この推論がいつも正しいとは限らないが，それが成り立つような十分条件を与えているのが陰関数定理であり，この関数 $\varphi(x)$ を $f(x,y)$ から定まる陰関数という．

まずは，2 変数関数に対する陰関数定理を紹介しよう．

定理 2.1（陰関数定理） Ω を $\mathbf{R}^2$ の領域，$(a,b)\in\Omega$，$f(x,y)$ を Ω で定義された C^1 級の実数値関数とする．このとき，

$$f(a,b)=0 \quad \text{および} \quad f_y(a,b)\neq 0 \tag{2.2}$$

ならば，方程式 (2.1) は (a,b) のある近傍で y について一意に解ける．すなわち，（十分小さな）正定数 r,δ および開区間 $(a-r,a+r)$ で定義された C^1 級関数 φ が存在し，以下の性質を満たす．

(1)　$f(x,\varphi(x))=0,\ |\varphi(x)-b|<\delta\ (|x-a|<r), \quad \varphi(a)=b$
(2)　$f(x,y)=0, |x-a|<r, |y-b|<\delta \Rightarrow y=\varphi(x)$
(3)　$\varphi'(x)=-\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$
(4)　f が C^k 級（$k\geq 2$）ならば，陰関数 φ もまた C^k 級

上記の性質 (1) は $\varphi(x)$ が $f(x,y)$ から定まる陰関数であり，かつ $\varphi(x)$ が $y=b$ の近傍にあることを述べている．(2) は，x が a の近傍にあるとき，y についての方程式 (2.1) は $y=b$ の近傍において唯一つの解（それが陰関数 $\varphi(x)$ である）しか持たないことを述べている．陰関数定理の証明で最も困難なのは，C^1 級の陰関数が唯一つ存在することを示すことである．一旦，陰関数の存在が示されてしまえば，等式

$$f(x,\varphi(x))=0$$

の両辺を x で微分し，合成関数の微分法を用いれば

$$f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$$

が得られる．これを $\varphi'(x)$ について解けば (3) が従う．さらに，この (3) を用いれば，k に関する帰納法により (4) が容易に示される．

この陰関数定理の (2.2) における仮定

$$f_y(a,b)\neq 0$$

は非常に重要な条件である．この条件は，yz 平面における $z = f(a,y)$ のグラフが $y = b$ において接してなく，そのグラフは y 軸に $y = b$ において横断的に交差していることを意味している．もし，$z = f(a,y)$ のグラフが $y = b$ において接しているとすると，その接し方にもよるが，ほんの少しでもグラフがずれただけで，その接点が消えてなくなったり（それゆえ陰関数が存在しなくなる）あるいは，その接点が二つの交点に変わったりし（それゆえ陰関数の一意性がなくなる）陰関数定理における結論は成り立たなくなってしまう．

以下の例では陰関数定理を使うまでもないが，陰関数定理の意味を理解するうえでは役に立つであろう．

例 2.1　$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ とする．$f(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) 全体の集合は，xy 平面上における原点を中心とする半径 1 の円周である．

$f(a,b) = 0, b > 0$ の場合を考えよう．このとき，

$$f_y(a,b) = 2b \neq 0$$

であるから陰関数定理が適用でき，（十分小さな）正定数 r と開区間 $(a-r, a+r)$ で定義された C^∞ 級関数 φ が存在し，$f(x,\varphi(x)) \equiv 0$, $\varphi(a) = b$ が成り立つ．この陰関数 φ は $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ に他ならない．

$f(a,b) = 0, b = 0$ の場合については，

$$f_y(a,b) = 0$$

となってしまうので，陰関数定理の仮定 (2.2) が満たされず，それゆえ陰関数定理が適用できない．実際，このときは $a = \pm 1$ であるが，$|x|$ の値が $|a| = 1$ より少しでも大きくなると，$f(x,y) = 0$ を満たす y は実数の範囲では存在せず，それゆえ陰関数も存在しない．逆に，$|x|$ の値が $|a| = 1$ より少しでも小さくなると，$f(x,y) = 0$ を満たす y は $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ という 2 つの解を持ってしまい，陰関数の一意性は成り立たない．

xy 平面上における集合 $\{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$ の軌跡と，yz 平面上における $z = f(x,y)$ のグラフを書いてみれば，上記の説明がはっきり理解できるであろう．