数学解析第１　第１１回講義ノート

Green の定理を証明する準備として，高校までに習ってきた公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(y)\,\mathrm{d}y = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

を少し一般化しよう．

補題 7.1 φ, ψ を $[a,b]$ で定義された C^1 級の関数で $c \le \varphi(x), \psi(x) \le d$ $(a \le x \le b)$ を満たすとし，$f(x,y)$ を $[a,b]\times[c,d]$ で定義された連続関数で，偏導関数 $f_x(x,y)$ もまた $[a,b]\times[c,d]$ で連続であるとする．$[a,b]$ 上の関数 h を

$$h(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

で定めると，h は C^1 級であり次式が成り立つ．

$$h'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y + f(x,\psi(x))\psi'(x) - f(x,\varphi(x))\varphi'(x)$$

証明 $[a,b]\times[c,d]\times[c,d]$ 上の関数 F を

$$F(x,u,v) := \int_u^v f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

で定めると，F は C^1 級であり

$$F_x(x,u,v) = \int_u^v f_x(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad F_u(x,u,v) = -f(x,u), \quad F_v(x,u,v) = f(x,v)$$

が成り立つ．また，$h(x) = F(x,\varphi(x),\psi(x))$ であるから，合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} h'(x) &= F_x(x,\varphi(x),\psi(x)) + F_u(x,\varphi(x),\psi(x))\varphi'(x) + F_v(x,\varphi(x),\psi(x))\psi'(x) \\ &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y - f(x,\varphi(x))\varphi'(x) + f(x,\psi(x))\psi'(x) \end{aligned}$$

となり，望みの式が得られた．（証明終）

以上の準備の下，領域 D が

$$D = \{(x,y)\,|\,a < x < b,\, \varphi(x) < y < \psi(x)\}$$

という形をしている場合に Green の定理を証明しよう．ただし，φ, ψ は $[a,b]$ で定義された C^1 級関数であり，$\varphi(x) \le \psi(x)$ $(a \le x \le b)$ を満たしているとする．向き付けられた曲線 $C_1, \ldots, C_4$ を，それぞれ

$$\begin{aligned} &C_1:\ (x,\varphi(x)) \quad (a \le x \le b), \qquad C_2:\ (b,y) \quad (\varphi(b) \le y \le \psi(b)) \\ &-C_3:\ (x,\psi(x)) \quad (a \le x \le b), \qquad -C_4:\ (a,y) \quad (\varphi(a) \le y \le \psi(a)) \end{aligned}$$

とする．このとき，$C = C_1 + \cdots + C_4$ は領域 D の境界で，D の内部を左手に見てまわるように向きがついている．曲線 C_2, C_4 上では x 座標は一定であるから，容易に

$$\int_{C_2} g\mathrm{d}x = \int_{C_4} g\mathrm{d}x = 0$$

が得られる．したがって，

$$\begin{aligned}
-\iint_D \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^b \big(g(x,\psi(x)) - g(x,\varphi(x))\big)\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^b g(x,\psi(x))\mathrm{d}x + \int_a^b g(x,\varphi(x))\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-C_3} g\mathrm{d}x + \int_{C_1} g\mathrm{d}x \\
&= \int_{C_1} g\mathrm{d}x + \int_{C_2} g\mathrm{d}x + \int_{C_3} g\mathrm{d}x + \int_{C_4} g\mathrm{d}x \\
&= \int_C g\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

が成り立つ．次に，補題 7.1 より

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y + f(x,\varphi(x))\varphi'(x) - f(x,\psi(x))\psi'(x)$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y + f(x,\varphi(x))\varphi'(x) - f(x,\psi(x))\psi'(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f(b,y)\mathrm{d}y - \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} f(a,y)\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_a^b f(x,\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x,\psi(x))\psi'(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{C_2} f\mathrm{d}y - \int_{-C_4} f\mathrm{d}y + \int_{C_1} f\mathrm{d}y - \int_{-C_3} f\mathrm{d}y \\
&= \int_C f\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

が成り立つ．これら二つの式を加えることにより，望みの式が示された．

全く同様にして，領域 D が

$$D = \{(x,y)\,|\, c < y < d,\, \varphi(y) < x < \psi(y)\}$$

という形をしている場合にも Green の定理が成り立つことが示される．さらに，領域 D がこのような形をしている有限個の領域に分割できる場合も，Green の定理が成り立つことが分かる．

定義 7.3 Ω を $\mathbf{R}^n$ の領域，$\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ を Ω で定義された連続なベクトル場とする．$\boldsymbol{u}$ が Ω においてスカラーポテンシャル（あるいは単に，ポテンシャル）をもつとは，スカラー場 $f \in C^1(\Omega)$ が存在して

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} f = \nabla f \qquad \text{すなわち} \qquad u_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (1 \le j \le n)$$

が成り立つときをいう．このとき，スカラー場 f をベクトル場 $\boldsymbol{u}$ のスカラーポテンシャル（あるいは単に，ポテンシャル）という．

定義 7.4 Ω を $\mathbf{R}^3$ の領域，$\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ を Ω で定義された連続なベクトル場とする．$\boldsymbol{B}$ が Ω においてベクトルポテンシャルをもつとは，C^1 級のベクトル場 $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ が存在して

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

が成り立つときをいう．このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ をベクトル場 $\boldsymbol{B}$ のベクトルポテンシャルという．

例 7.1 (1) 3 次元空間における鉛直下向きの一様な重力場 $\boldsymbol{F}$ を考えよう．このような重力場 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -g\boldsymbol{e}_3$$

で与えられる．ここで，g は重力加速度であり，$\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ は鉛直上向きの単位ベクトルである．このとき，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \nabla(-gx_3)$$

であるから，$\boldsymbol{F}$ はポテンシャル $-gx_3$ をもつ．なお，物理ではこのポテンシャルの符号を変えた gx_3 を重力ポテンシャルと呼んでいる．

(2) 3 次元空間における質量 M の質点による万有引力が作り出す力の場 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -MG\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^3}$$

で与えられる．ここで，G は万有引力定数であり，$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ である．このとき，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \nabla\Big(MG\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\Big)$$

であるから，$\boldsymbol{F}$ はポテンシャル $MG\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}$ をもつ．物理ではこの場合も，このポテンシャルの符号を変えた $-MG\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}$ を万有引力のポテンシャルと呼んでいる．

力の場 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャルをもつとき，その力はポテンシャル力あるいは保存力であると言う．時刻 t において位置 $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ にいる質量 m の質点がポテンシャル力 $\boldsymbol{F} = -\nabla f$ の下で運動しているとしよう．このとき，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}(t) = m\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)) = -m(\nabla f)(\boldsymbol{x}(t))$$

すなわち，

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_j}{\mathrm{d}t^2}(t) = -m\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}(t)) \qquad (1 \le j \le 3)$$

で与えられる．このとき，上式と合成関数の微分法より

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2\right) = \sum_{j=1}^{3}m\frac{\mathrm{d}^2x_j}{\mathrm{d}t^2}(t)\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}(t)\\ &= -\sum_{j=1}^{3}m\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}(t))\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(mf(\boldsymbol{x}(t))\big)\end{aligned}$$

が成り立つ．特に，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2 + mf(\boldsymbol{x}(t))\right) = 0$$

となり，

$$\frac{1}{2}m\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2 + mf(\boldsymbol{x}(t)) \equiv \text{定数}$$

が得られる．物理では，この式は力学的エネルギーの保存則と呼ばれており，この左辺第 1 項目は運動エネルギー，第 2 項目は位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）である．

定理 7.2 Ω を $\mathbf{R}^n$ の領域，$\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ を Ω で定義された連続なベクトル場とし，Ω においてポテンシャル f を持つとする．このとき，点 $\boldsymbol{x}_0$ から点 $\boldsymbol{y}_0$ へ向かう Ω 内の任意の C^1 級の曲線 C に対して，

$$\int_C \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{y}_0) - f(\boldsymbol{x}_0)$$

が成り立つ．

証明 仮定より，$\boldsymbol{u} = \nabla f$ が成り立っている．さて，曲線 C は

$$C:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \qquad (a \le t \le b)$$

とパラメーター表示されているとする．このとき，$\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{x}_0$ および $\boldsymbol{\varphi}(b) = \boldsymbol{y}_0$ が成り立っていることに注意しよう．線積分の定義および合成関数の微分法から

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_a^b \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (\nabla f)(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\boldsymbol{\varphi}(t))\mathrm{d}t = f(\boldsymbol{\varphi}(b)) - f(\boldsymbol{\varphi}(a))\\ &= f(\boldsymbol{y}_0) - f(\boldsymbol{x}_0)\end{aligned}$$

となり，望みの式が示された.（証明終）

このことから，ポテンシャルをもつベクトル場に対する線積分の値は，線分路 C の途中経路によらず，始点と終点のみで決まることが分かる．力の場 $\boldsymbol{F}$ の下，物体が曲線 C に沿って動いた時，その力が物体にした仕事 W は

$$W = \int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

で与えられる．定理 7.2 より，力の場が保存力になっていれば，その力がする仕事は物体の動いた経路によらず，始点と終点の位置エネルギーの差で与えられることが分かる．