

1 \mathbf{R} 上で定義された C^1 級関数 f は, 任意の閉区間 $I = [a, b]$ で一様連続であることを, 教科書の定理 5.4 を使わずに示せ. (ヒント: f' は I で有界であることを示す & 平均値の定理)

2 区間 I で定義された関数 f が次の性質を持つとする:

「ある正数 ϵ_0 および区間 I における数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ が存在して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0 \quad \text{および} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0 \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

が成り立つ。」

このとき, f は I で一様連続ではないことを示せ.

(これより, f が I で一様連続でないことを証明するためには, 上の性質をもつ数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を構成すればよいことが分かる.)