数学解析第１　第９回講義ノート

6　ベクトル場とスカラー場

この節と次節において，ベクトル解析の基本的な事項を解説する．まず，実数値関数に対する勾配，および $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数に対する発散および回転，さらにはそれらに作用する Laplace 作用素を定義しよう．

定義 6.1 Ω を $\mathbf{R}^3$ における領域，$f = f(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3))$ を Ω で定義された実数値関数，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), u_3(\boldsymbol{x}))$ を Ω で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数とし，それらは C^1 級であるとする．

(1) f の勾配 (gradient) を次式で定める．

$$\operatorname{grad} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$$

これは，ナブラと呼ばれる記号 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ を用いて，∇f とも書かれる．

(2) $\boldsymbol{u}$ の発散 (divergence) を次式で定める．

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} := \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

これは $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ とも書かれる．

(3) $\boldsymbol{u}$ の回転 (rotation) を次式で定める．

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

これは $\nabla \times \boldsymbol{u}$ あるいは $\operatorname{curl} \boldsymbol{u}$ とも書かれる．

(4) f および $\boldsymbol{u}$ が C^2 級であるとき，それらに作用する Laplace 作用素 (Laplacian)Δ を

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}, \qquad \Delta \boldsymbol{u} := (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$$

で定める．

注意 (1) ナブラ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ を形式的にベクトルのように思い，内積 $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ や外積 $\nabla \times \boldsymbol{u}$ を計算すれば，$\boldsymbol{u}$ の発散や回転が計算できる．その意味で，ナブラを用いた記号の便利さが理解できよう．また，外積の定義を覚えるには次のようにすればよい．$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を標準基底とし，行列の展開公式（第１行目を展開）を用いて

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \boldsymbol{u} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ u_3 & u_1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

と計算すればよい．

(2) 流体力学においては，$\boldsymbol{u}$ が流体の速度場を表わすとき，その回転 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ を渦度 (vorticity) と呼ぶ．

次に，空間内におけるスカラー場とベクトル場を定義しよう．それらを数学的に厳密に定義するためには，空間とは何か？ベクトルとは何か？内積とは何か？を明確に定義しておかなければならない．そのための一つの方法は，空間をアフィン (affine) 空間として扱えばよいが，ここでは深入りするのは避け，素朴に考えることにする．

定義 6.2 空間内の各点 P に対してスカラー（実数あるいは複素数）$F(P)$ およびベクトル $\boldsymbol{U}(P)$ が与えられているとき，F および $\boldsymbol{U}$ をそれぞれスカラー場およびベクトル場という．

これだけでは，単に実数値関数や $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数がスカラー場やベクトル場だと思う人がいるかもしれないが，それは誤りである．スカラー場やベクトル場を $\mathbf{R}^3$ 上で定義された実数値関数や $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数と見なすためには，空間内に座標の基準点 O と正規直交基底 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ を定めることにより直交座標系 $(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ を導入しなければならない．このとき，空間内の任意の点 P に対して

$$\overrightarrow{OP} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \tag{6.1}$$

を満たす $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ がただ一つ定まる．この $\boldsymbol{x}$ を点 P の座標と呼び，空間と 3 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ とを同一視する．このとき

$$f(\boldsymbol{x}) := F(P) \tag{6.2}$$

とおき，スカラー場 F とスカラー値関数 f とを同一視する．さらに，

$$\boldsymbol{U}(P) = u_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_1 + u_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_2 + u_3(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_3 \tag{6.3}$$

により $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), u_3(\boldsymbol{x}))$ を定め，ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ とベクトル値関数 $\boldsymbol{u}$ とを同一視する．

このように，スカラー場 F やベクトル場 $\boldsymbol{U}$ をスカラー値関数 f やベクトル値関数 $\boldsymbol{u}$ と同一視するには，直交座標系 $(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ を決めなければならない．ところが，座標系の取り方は無限に存在する．したがって座標系の選び方には任意性があるが，定義よりスカラー場やベクトル場はこのような座標系の取り方に依存するような量であってはならない．どの直交座標系を使っても必ず同じスカラーやベクトルが得られるとき，それらをスカラー場，ベクトル場と呼ぶのである．

このように説明されても，まだピンとこないかもしれない．次に，スカラー場 F の勾配 $\mathrm{grad}\,F$，ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ の発散 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{U}$ と回転 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{U}$ を定義し，$\mathrm{grad}\,F$ がベクトル場，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{U}$ がスカラー場になることを示そう．その証明を見れば，場という言葉の意味が理解できるであろう．なお，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{U}$ は上の意味ではベクトル場にはならない．右手系と左手系の選び方の違いにより符号の違いが出て来てしまうからである．このようなものは軸性ベクトル場と呼ばれている．

スカラー場 F とベクトル場 $\boldsymbol{U}$ が与えられた時，これらを適当な直交座標系 $(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ を用いて表示する．直交座標系の取り方には任意性があるが，他の直交座標系 $(O'; \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ を用いて表示した場合との関係を調べよう．次の補題が成り立つことを確かめるのは線形代数のよい復習になるであろう．

補題 6.1 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ および $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ を正規直交基底，すなわち

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たしているとし，行列 $T = (t_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ を $t_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_j$ で定める．このとき，T は直交行列であり，$\boldsymbol{e}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} t_{ij} \boldsymbol{e}'_j$ および $\boldsymbol{e}'_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} t_{ji} \boldsymbol{e}_j$ が成り立つ．

補題 6.2 補題 6.1 の仮定に加え，O, O' を空間内の 2 点とし，ベクトル $\overrightarrow{OO'}$ の基底 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ を用いたときの成分を $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$ とし，ベクトル $\overrightarrow{O'O}$ の基底 $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ を用いたときの成分を $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2, b_3)$ とする．すなわち，

$$\overrightarrow{OO'} = \sum_{j=1}^{3} a_j \boldsymbol{e}_j, \qquad \overrightarrow{O'O} = \sum_{j=1}^{3} b_j \boldsymbol{e}'_j$$

また，空間内の任意の点 P に対して，直交座標系 $(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ に関する P の座標を $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ とし，直交座標系 $(O'; \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ に関する P の座標を $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3)$ とする．すなわち，

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{j=1}^{3} x_j \boldsymbol{e}_j, \qquad \overrightarrow{O'P} = \sum_{j=1}^{3} y_j \boldsymbol{e}'_j \tag{6.4}$$

このとき，$\boldsymbol{a} = -T\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ が成り立つ．

補題 6.2 の等式については次のようにして得られる．補題 6.1 の結果を用いて

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i = \overrightarrow{OO'} = -\overrightarrow{O'O} = -\sum_{j=1}^{3} b_j \boldsymbol{e}'_j = -\sum_{j=1}^{3} b_j \left(\sum_{i=1}^{3} t_{ij} \boldsymbol{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{3} \left(-\sum_{j=1}^{3} t_{ij} b_j \right) \boldsymbol{e}_i$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \left(-\sum_{j=1}^{3} t_{ij} b_j \right) \boldsymbol{e}_i$$

と書き直そう．$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ が基底であったことから，

$$a_i = -\sum_{j=1}^{3} t_{ij} b_j = -(T\boldsymbol{b})_i \quad (1 \leq i \leq 3)$$

となり，$\boldsymbol{a} = -T\boldsymbol{b}$ が得られる．他の式も同様である．

以上の準備の下，スカラー場 F およびベクトル場 $\boldsymbol{U}$ が与えられた時，F の勾配 $\operatorname{grad} F$ および $\boldsymbol{U}$ の発散 $\operatorname{div} \boldsymbol{U}$ が，それぞれベクトル場およびスカラー場として定義出来ることを示そう．

定理 6.1 スカラー場 F が与えられた時，直交座標系 $(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ および $(O'; \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ に関する F の表示を，補題 6.2 における記号を用いて，それぞれ $f(\boldsymbol{x})$ および $g(\boldsymbol{y})$ としよう．すなわち，(6.1) 式における記号の下

$$F(P) = f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{y})$$

とする．このとき，次式が成り立つ．

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial y_j}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}'_j$$

証明 補題 6.1 および 6.2 より

$$g(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) = f(T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a}) = f\big(\sum_{i=1}^{3} t_{1i}y_i + a_1, \sum_{i=1}^{3} t_{2i}y_i + a_2, \sum_{i=1}^{3} t_{3i}y_i + a_3\big)$$

この両辺を y_j で偏微分すると，合成関数の微分法より

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y_j}(\boldsymbol{y}) &= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(\sum_{i=1}^{3} t_{1i}y_i + a_1, \sum_{i=1}^{3} t_{2i}y_i + a_2, \sum_{i=1}^{3} t_{3i}y_i + a_3\big)\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sum_{i=1}^{3} t_{ki}y_i + a_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})t_{kj}\end{aligned}$$

したがって，補題 6.1 より

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial y_j}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}'_j = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})t_{kj}\right)\boldsymbol{e}'_j = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})\left(\sum_{j=1}^{3} t_{kj}\boldsymbol{e}'_j\right) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_k$$

が得られる．(証明終)

この定理により，スカラー場 F の勾配 $\mathrm{grad}\, F$ がベクトル場として

$$\mathrm{grad}\, F(P) := \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_j \tag{6.5}$$

により定義される．

定理 6.2 ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ が与えられた時，直交座標系 $(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ および $(O'; \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ に関する $\boldsymbol{U}$ の表示を，補題 6.2 における記号を用いて，それぞれ $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), u_3(\boldsymbol{x}))$ および $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}) = (v_1(\boldsymbol{y}), v_2(\boldsymbol{y}), v_3(\boldsymbol{y}))$ としよう．すなわち，(6.1) 式における記号の下

$$\boldsymbol{U}(P) = \sum_{j=1}^{3} u_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{3} v_j(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}'_j$$

とする．このとき，次式が成り立つ．

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial y_j}(\boldsymbol{y})$$

証明 まず，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$ の関係を導こう．補題 6.1 より

$$\sum_{j=1}^{3} v_j(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}'_j = \sum_{i=1}^{3} u_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} u_i(\boldsymbol{x})\left(\sum_{j=1}^{3} t_{ij}\boldsymbol{e}'_j\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} u_i(\boldsymbol{x})t_{ij}\right)\boldsymbol{e}'_j$$

ここで，$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ が基底であったことと補題 6.2 より

$$v_j(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{3} u_i(\boldsymbol{x}) t_{ij} = \sum_{i=1}^{3} u_i(T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{a}) t_{ij}$$

が得られる．この両辺を y_j で偏微分すると，合成関数の微分法より

$$\frac{\partial v_j}{\partial y_j}(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) t_{kj} \right) t_{ij}$$

したがって，補題 6.1 より

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial y_j}(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) \left(\sum_{j=1}^{3} t_{kj} t_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) \delta_{kj} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

が得られる.（証明終）

この定理により，ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ の発散 $\operatorname{div} \boldsymbol{U}$ がスカラー場として

$$\operatorname{div} \boldsymbol{U}(P) := \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \tag{6.6}$$

により定義される．

ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ の回転 $\operatorname{rot} \boldsymbol{U}$ は，上で見て来たような意味ではベクトル場にはならない．正確には，座標系の変換において現れる行列 T の行列式 $\det T$ 倍だけのずれが生じる．行列 T は直交行列であったから，その行列式の値は $\det T = \pm 1$ に限られる．$\det T = 1$ の場合，その座標系の変換は**向きを保つ**という．向きを保つ変換だけに制限をすれば，ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ の回転 $\operatorname{rot} \boldsymbol{U}$ もまたベクトル場になる．このようなベクトル場は，軸性ベクトル場と呼ばれる．物理的には，座標系を右手系あるいは左手系のどちらか一方に制限することに対応する．以上のことを，定理の形で正確に述べよう．その為に，簡単な補題を一つ準備しておく．

補題 6.3 直交行列 $T = (t_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$ に対して次式が成り立つ.

$$T = (\det T) \begin{pmatrix} t_{22}t_{33} - t_{23}t_{32} & t_{23}t_{31} - t_{21}t_{33} & t_{21}t_{32} - t_{22}t_{31} \\ t_{32}t_{13} - t_{33}t_{12} & t_{33}t_{11} - t_{31}t_{13} & t_{31}t_{12} - t_{32}t_{11} \\ t_{12}t_{23} - t_{13}t_{22} & t_{13}t_{21} - t_{23}t_{11} & t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} \end{pmatrix}$$

証明 T が直交行列であることと，余因子行列を用いた逆行列の公式より

$$T = \left({}^tT\right)^{-1} = \frac{1}{\det {}^tT} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} t_{22} & t_{32} \\ t_{23} & t_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} t_{21} & t_{31} \\ t_{23} & t_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} t_{21} & t_{31} \\ t_{22} & t_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} t_{12} & t_{32} \\ t_{13} & t_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} t_{11} & t_{31} \\ t_{13} & t_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} t_{11} & t_{31} \\ t_{12} & t_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} t_{12} & t_{22} \\ t_{13} & t_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{13} & t_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} t_{22}t_{33} - t_{23}t_{32} & t_{23}t_{31} - t_{21}t_{33} & t_{21}t_{32} - t_{22}t_{31} \\ t_{32}t_{13} - t_{33}t_{12} & t_{33}t_{11} - t_{31}t_{13} & t_{31}t_{12} - t_{32}t_{11} \\ t_{12}t_{23} - t_{13}t_{22} & t_{13}t_{21} - t_{23}t_{11} & t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} \end{pmatrix}$$

これと $(\det T)^2 = 1$ より望みの式が従う．（証明終）

定理 6.3 ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ が与えられた時，直交座標系 $(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ および $(O'; \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ に関する $\boldsymbol{U}$ の表示を，補題 6.2 における記号を用いて，それぞれ $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), u_3(\boldsymbol{x}))$ および $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}) = (v_1(\boldsymbol{y}), v_2(\boldsymbol{y}), v_3(\boldsymbol{y}))$ としよう．このとき，次式が成り立つ．

$$\sum_{j=1}^{3} \bigl(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_j \boldsymbol{e}_j = (\det T) \sum_{j=1}^{3} \bigl(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})\bigr)_j \boldsymbol{e}'_j$$

ただし，$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}$ は定義 6.1 の意味でのベクトル値関数の回転であり，$(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u})_j$ はその第 j 成分を表わす．

証明 定理 6.2 の証明において

$$v_j(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{3} u_k(T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{a}) t_{kj} \qquad (1 \leq j \leq 3)$$

を示した．この両辺を y_i で偏微分すると，合成関数の微分法より

$$\frac{\partial v_j}{\partial y_i}(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\boldsymbol{x}) t_{li} \right) t_{kj} \qquad (1 \leq i, j \leq 3)$$

これより

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_3}{\partial y_2}(\boldsymbol{y}) - \frac{\partial v_2}{\partial y_3}(\boldsymbol{y}) &= \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\boldsymbol{x}) \bigl(t_{l2} t_{k3} - t_{l3} t_{k2}\bigr) \\
&= \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) \right) (t_{22} t_{33} - t_{23} t_{32}) \\
&\quad + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \right) (t_{32} t_{13} - t_{33} t_{12}) \\
&\quad + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \right) (t_{12} t_{23} - t_{13} t_{22})
\end{aligned}$$

したがって，補題 6.3 より

$$\begin{aligned}
(\det T)\bigl(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})\bigr)_1 &= \bigl(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_1 (\det T)\bigl(t_{22} t_{33} - t_{23} t_{32}\bigr) \\
&\quad + \bigl(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_2 (\det T)\bigl(t_{32} t_{13} - t_{33} t_{12}\bigr) \\
&\quad + \bigl(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_3 (\det T)\bigl(t_{12} t_{23} - t_{13} t_{22}\bigr) \\
&= \bigl(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_1 t_{11} + \bigl(\mathrm{rot}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_2 t_{21} + \bigl(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_3 t_{31} \\
&= \sum_{k=1}^{3} \bigl(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_k t_{k1}
\end{aligned}$$

同様にして

$$(\det T)\bigl(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})\bigr)_j = \sum_{k=1}^{3} \bigl(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_k t_{kj} \qquad (1 \leq j \leq 3)$$

が示される．これと補題 6.1 より

$$
\begin{aligned}
(\det T)\sum_{j=1}^{3}\bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})\bigr)_j\mathbf{e}'_j &= \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_k t_{kj}\right)\mathbf{e}'_j = \sum_{k=1}^{3}\bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_k\left(\sum_{j=1}^{3}t_{kj}\boldsymbol{e}'_j\right)\\
&= \sum_{k=1}^{3}\bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_k\boldsymbol{e}_k
\end{aligned}
$$

となり，望みの式が得られた.（証明終）

上の証明はやや込み入っているという印象を受けるであろう．形式的にはなるが，以下のような見通しのよい計算法もある．補題 6.1 および

$$
u_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{3}t_{jk}v_k(\boldsymbol{y}), \qquad \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^{3}t_{jk}\frac{\partial}{\partial y_k}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1(\boldsymbol{x}) & u_2(\boldsymbol{x}) & u_3(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{3}t_{1k}\mathbf{e}'_k & \sum_{k=1}^{3}t_{2k}\mathbf{e}'_k & \sum_{k=1}^{3}t_{3k}\mathbf{e}'_k \\ \sum_{k=1}^{3}t_{1k}\frac{\partial}{\partial y_k} & \sum_{k=1}^{3}t_{2k}\frac{\partial}{\partial y_k} & \sum_{k=1}^{3}t_{3k}\frac{\partial}{\partial y_k} \\ \sum_{k=1}^{3}t_{1k}v_k(\boldsymbol{y}) & \sum_{k=1}^{3}t_{2k}v_k(\boldsymbol{y}) & \sum_{k=1}^{3}t_{3k}v_k(\boldsymbol{y}) \end{vmatrix}\\
&= \left|\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ v_1(\boldsymbol{y}) & v_2(\boldsymbol{y}) & v_3(\boldsymbol{y}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{pmatrix}\right|\\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ v_1(\boldsymbol{y}) & v_2(\boldsymbol{y}) & v_3(\boldsymbol{y}) \end{vmatrix}\begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{vmatrix}\\
&= \bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})\bigr)(\det T)
\end{aligned}
$$