数学解析第１　第１回講義ノート

1　記号と復習＋α

自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対して，n 個の実数の組 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ 全体の集合を $\mathbf{R}^n$ と書く．すなわち，

$$\mathbf{R}^n := \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

各 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ および $c \in \mathbf{R}$ に対して，和 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ およびスカラー倍 $c\boldsymbol{x}$ が次式によって定義されている．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &:= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ c\boldsymbol{x} &:= (cx_1, \ldots, cx_n) \end{aligned}$$

このとき，集合 $\mathbf{R}^n$ はベクトル空間（線形空間）になる．すなわち，集合 $\mathbf{R}^n$ は上記の和とスカラー倍に関してベクトル空間の公理を満たす．通常，$\mathbf{R}^n$ と書くときは，単に集合としてではなく，このベクトル空間のことを指し，n 次元数ベクトル空間と呼ぶ.

次に，各 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ および $c \in \mathbf{R}$ に対して，内積 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ を次式で定める．

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

このとき，この内積が次の性質を満たすことは容易に確かめられる．

(1)　$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0$ および $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

(2)　$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$

(3)　$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$

(4)　$(c\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = c(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$

余談になるが，数ベクトル空間とは限らないベクトル空間 V が与えられており，しかも V の各 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して実数 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ が定まっており，しかもそれが上記の性質を満たすとき，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積と呼び，内積を備えたベクトル空間のことを内積空間と呼ぶ.

さて内積が与えられると，各数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{x}$ の大きさを表すノルムと呼ばれる量 $\|\boldsymbol{x}\|$ が次式で定められる．

$$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

さらに，ノルムが与えられると，数ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ を点集合と見たとき，各 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ との距離が

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

で定められる．これらノルムと距離については，後でもう少しだけ詳しく紹介する．数ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ に上記の内積の構造を入れたものを（したがって，その内積から上記のように距離が定まり，その距離により位相が入る）n 次元 Euclid 空間という．Euclid 空間はベクトル空間の構造と位相構造の両方を兼ね備えた，位相ベクトル空間とよばれるものの最も

簡単な例である．この距離を用いて，$\mathbf{R}^n$ における $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ を中心とする半径 $r > 0$ の開球 $B_r(\boldsymbol{a})$ を次式で定める．

$$B_r(\boldsymbol{a}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r\}$$

次に，$\mathbf{R}^n$ の領域上で定義された関数 f に関する定義を思い出そう．

定義 1.1 Ω を $\mathbf{R}^n$ における領域，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$，$f = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ を Ω で定義された n 変数の実数値関数とする．

(1) f が $\boldsymbol{a}$ で連続であるとは，$\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$ が成り立つときをいう．すなわち，

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega\ \big(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \varepsilon\big)$$

(2) f が Ω で連続であるとは，f が Ω の各点 $\boldsymbol{a}$ で連続であるときをいう．すなわち，

$$\forall \boldsymbol{a} \in \Omega\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega\ \big(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \varepsilon\big)$$

(3) f が $\boldsymbol{a}$ で x_j $(1 \leq j \leq n)$ に関して偏微分可能であるとは，極限値

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = f_{x_j}(\boldsymbol{a}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{a})}{h}$$

が存在するときをいう．ここで，$\boldsymbol{e}_j$ は j 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_j = (0, \ldots, 0, \overset{j}{\check{1}}, 0, \ldots, 0)$ である．このとき，$f_{x_j}(\boldsymbol{a})$ を $\boldsymbol{a}$ における f の x_j に関する偏微分係数という．

(4) f が Ω で x_j $(1 \leq j \leq n)$ に関して偏微分可能であるとは，f が Ω の各点で x_j に関して偏微分可能であるときをいう．このとき，Ω の各点 $\boldsymbol{x}$ を $f_{x_j}(\boldsymbol{x})$ に対応させる関数 f_{x_j} が定まるが，これを f の x_j に関する偏導関数という．同様にして，2 階偏導関数，さらには m 階偏導関数も（それらが存在するとき）定義される．

(5) f が Ω で m 回連続微分可能あるいは f が Ω で C^m 級であるとは，f の m 階までのすべての偏導関数が存在しかつ連続であるときをいい，Ω で C^m 級な関数全体の集合を $C^m(\Omega)$ と書く．さらに，f が Ω で無限回連続微分可能あるいは f が Ω で C^∞ 級であるとは，f のすべての偏導関数が存在しかつ連続であるときをいい，Ω で C^∞ 級な関数全体の集合を $C^\infty(\Omega)$ と書く．

(6) ナブラと呼ばれている記号 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ を用いて，次のように書く．

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\right)$$

(7) f が $\boldsymbol{a}$ で全微分可能であるとは，次式を満たす $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ が存在するときをいう．

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{h} + o(\|\boldsymbol{h}\|) \quad \big(\boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^n, \|\boldsymbol{h}\| \to 0\big)$$

すなわち

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0$$

（全微分可能であれば偏微分可能であり，$\boldsymbol{c} = \nabla f(\boldsymbol{a})$ が成り立つ．）

(8) f が Ω で全微分可能であるとは，f が Ω の各点で全微分可能であるときをいう．

上の定義の中でも述べたように，全微分可能であれば偏微分可能であることがいえるが，その逆は一般に成り立たない．すなわち，偏微分可能であっても全微分可能でないような関数が存在する．しかしながら，偏導関数の連続性を仮定すれば全微分可能性が従うことが次の命題から分かる．

命題 1.1　f が $\mathbf{R}^n$ の領域 Ω で C^1 級であれば，f は Ω で全微分可能である．

次に，合成関数の微分法を思い出そう．まずは，二つの 1 変数関数の合成関数に関する微分法を紹介する．

命題 1.2　$f(x)$ は開区間 I で微分可能，$g(y)$ は開区間 J で微分可能であり，$f(x) \in J$ $(\forall x \in I)$ とする．このとき，合成関数 $g \circ f$ もまた I で微分可能であり次式が成り立つ．

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) f'(x)$$

これについては，$y = f(x)$ および $z = g(y)$ の合成関数と思い

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

という形で覚えていたことであろう．

次に，一つの m 変数関数と m 個の 1 変数関数との合成関数に関する微分法を思い出そう．

命題 1.3　$\boldsymbol{f}(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big)$ は開区間 I で微分可能，$g(\boldsymbol{y}) = g(y_1, \ldots, y_m)$ は $\mathbf{R}^m$ の領域 D で全微分可能であり，$\boldsymbol{f}(x) \in D$ $(\forall x \in I)$ を満たすとする．このとき，合成関数 $(g \circ \boldsymbol{f})(x) = g(\boldsymbol{f}(x)) = g(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ もまた I で微分可能であり，次式が成り立つ．

$$\frac{d}{dx} g(\boldsymbol{f}(x)) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(\boldsymbol{f}(x)) f_1'(x) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(\boldsymbol{f}(x)) f_m'(x)$$

この合成関数の微分法の公式は，$z = g(\boldsymbol{y})$ と $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x)$ の合成関数であると見て，次の形に書いておくと覚えやすいであろう．

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_m} \frac{dy_m}{dx}$$

最後に，一つの m 変数関数と m 個の n 変数関数との合成関数に関する微分法を思い出そう．次の命題は，基本的には上の命題と偏微分の定義から直ちに従う．

命題 1.4　$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \big(f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x})\big)$ は $\mathbf{R}^n$ の領域 Ω で偏微分可能，$g(\boldsymbol{y}) = g(y_1, \ldots, y_m)$ は $\mathbf{R}^m$ の領域 D で全微分可能であり，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in D$ $(\forall \boldsymbol{x} \in \Omega)$ を満たすとする．このとき，合成関数 $(g \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = g(f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x}))$ もまた Ω で偏微分可能であり，各 j $(1 \le j \le n)$ に対して次式が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$$

この合成関数の微分法の公式は，$z = g(\boldsymbol{y})$ と $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の合成関数であると見て，次の形に書いておくと覚えやすいであろう．

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j} \qquad (1 \leq j \leq n)$$

次に，滑らかな関数を多項式で近似できることを保証する Taylor の定理を思い出そう．まずは，1 変数関数の場合から紹介する．

命題 1.5 f は開区間 I で m 回微分可能な関数とし，$a \in I$ とする．このとき，関数 f は次の形の有限和に展開される．

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(m)}(a+\theta(x-a))}{m!}(x-a)^m$$

ここで，θ は $0 < \theta < 1$ を満たす（a や x にも依存する）実数である．

次に，n 変数関数 $f(\boldsymbol{x})$ の Taylor 展開を考える．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^n$ を任意に固定し，1 変数関数

$$\phi(t) := f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h})$$

に対して，上の命題を適用すると次式が成り立つ．

$$\phi(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\phi^{(m)}(\theta)}{m!}$$

合成関数の微分法を用いて導関数 $\phi^{(k)}(t)$ を計算すれば，次の命題が得られる．

命題 1.6 $f(\boldsymbol{x})$ は $\mathbf{R}^n$ の領域 Ω で定義された C^m 級関数，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^n$ は $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h} \in \Omega$ $(0 \leq t \leq 1)$ を満たす（すなわち，二点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}$ を結ぶ線分が Ω に含まれている）とする．このとき，次式を満たす $\theta \in (0,1)$ が存在する．

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = &\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}\left(\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f\right)(\boldsymbol{a}) \\ &+ \frac{1}{m!}\left(\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f\right)(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h}) \end{aligned}$$

この有限 Taylor 展開の公式は，次に紹介する multi-index（多重指標）と呼ばれる記号を用いると 1 変数関数に対する公式とほぼ同じ形に書くことができる．Multi-index とは，n 個の非負整数の組み $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ のことであるが，次のような使い方をする．

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ &\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \\ &\alpha! := \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n! \\ &|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \end{aligned}$$

この multi-index を用いると，多項定理を次のように書ける．

$$(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \boldsymbol{x}^\alpha$$

ここで，右辺の和は $|\alpha| = k$ を満たす全ての multi-index α に対する和である．このことから，

$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k = k! \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \boldsymbol{h}^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \right)^\alpha$$

が成り立つことが分かる．したがって，有限 Taylor 展開の公式は

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \sum_{|\alpha| \le m-1} \frac{\boldsymbol{h}^\alpha}{\alpha!} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \right)^\alpha f \right)(\boldsymbol{a}) + \sum_{|\alpha|=m} \frac{\boldsymbol{h}^\alpha}{\alpha!} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \right)^\alpha f \right)(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})$$

と書き直すことができる．さらに，$f^{(\alpha)} := \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^\alpha f$ と書くことにすれば，次式が得られる．

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\alpha| \le m-1} \frac{f^{(\alpha)}(\boldsymbol{a})}{\alpha!} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^\alpha + \sum_{|\alpha|=m} \frac{f^{(\alpha)}(\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}))}{\alpha!} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^\alpha$$

これは，1 変数関数に対する有限 Taylor 展開の公式とほとんど同じ形をしていることが分かるであろう．これを見ても，multi-index の便利さが理解できよう．