

## 数学解析第1 第11回講義ノート

Green の定理を証明する準備として，高校までに習ってきた公式

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(y) dy = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

を少し一般化しよう．

**補題 7.1**  $\varphi, \psi$  を  $[a, b]$  で定義された  $C^1$  級の関数で  $c \leq \varphi(x), \psi(x) \leq d$  ( $a \leq x \leq b$ ) を満たすとし， $f(x, y)$  を  $[a, b] \times [c, d]$  で定義された連続関数で，偏導関数  $f_x(x, y)$  もまた  $[a, b] \times [c, d]$  で連続であるとする． $[a, b]$  上の関数  $h$  を

$$h(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

で定めると， $h$  は  $C^1$  級であり次式が成り立つ．

$$h'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, y) dy + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x)$$

**証明**  $[a, b] \times [c, d] \times [c, d]$  上の関数  $F$  を

$$F(x, u, v) := \int_u^v f(x, y) dy$$

で定めると， $F$  は  $C^1$  級であり

$$F_x(x, u, v) = \int_u^v f_x(x, y) dy, \quad F_u(x, u, v) = -f(x, u), \quad F_v(x, u, v) = f(x, v)$$

が成り立つ．また， $h(x) = F(x, \varphi(x), \psi(x))$  であるから，合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} h'(x) &= F_x(x, \varphi(x), \psi(x)) + F_u(x, \varphi(x), \psi(x))\varphi'(x) + F_v(x, \varphi(x), \psi(x))\psi'(x) \\ &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, y) dy - f(x, \varphi(x))\varphi'(x) + f(x, \psi(x))\psi'(x) \end{aligned}$$

となり，望みの式が得られた（証明終）

以上の準備の下，領域  $D$  が

$$D = \{(x, y) \mid a < x < b, \varphi(x) < y < \psi(x)\}$$

という形をしている場合に Green の定理を証明しよう．ただし， $\varphi, \psi$  は  $[a, b]$  で定義された  $C^1$  級関数であり， $\varphi(x) \leq \psi(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) を満たしているとする．向き付けられた曲線  $C_1, \dots, C_4$  を，それぞれ

$$\begin{aligned} C_1 &: (x, \varphi(x)) \quad (a \leq x \leq b), & C_2 &: (b, y) \quad (\varphi(b) \leq y \leq \psi(b)) \\ -C_3 &: (x, \psi(x)) \quad (a \leq x \leq b), & -C_4 &: (a, y) \quad (\varphi(a) \leq y \leq \psi(a)) \end{aligned}$$

とする．このとき， $C = C_1 + \dots + C_4$  は領域  $D$  の境界で， $D$  の内部を左手に見てまわるように向きがついている．曲線  $C_2, C_4$  上では  $x$  座標は一定であるから，容易に

$$\int_{C_2} g dx = \int_{C_4} g dx = 0$$

が得られる．したがって，

$$\begin{aligned} - \iint_D \frac{\partial g}{\partial y} dx dy &= - \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\ &= - \int_a^b (g(x, \psi(x)) - g(x, \varphi(x))) dx \\ &= - \int_a^b g(x, \psi(x)) dx + \int_a^b g(x, \varphi(x)) dx \\ &= - \int_{-C_3} g dx + \int_{C_1} g dx \\ &= \int_{C_1} g dx + \int_{C_2} g dx + \int_{C_3} g dx + \int_{C_4} g dx \\ &= \int_C g dx \end{aligned}$$

が成り立つ．次に，補題 7.1 より

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy = \frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy + f(x, \varphi(x))\varphi'(x) - f(x, \psi(x))\psi'(x)$$

であるから，

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy &= \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left( \frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy + f(x, \varphi(x))\varphi'(x) - f(x, \psi(x))\psi'(x) \right) dx \\ &= \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f(b, y) dy - \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} f(a, y) dy \\ &\quad + \int_a^b f(x, \varphi(x))\varphi'(x) dx - \int_a^b f(x, \psi(x))\psi'(x) dx \\ &= \int_{C_2} f dy - \int_{-C_4} f dy + \int_{C_1} f dy - \int_{-C_3} f dy \\ &= \int_C f dy \end{aligned}$$

が成り立つ．これら二つの式を加えることにより，望みの式が示された．

全く同様にして，領域  $D$  が

$$D = \{(x, y) \mid c < y < d, \varphi(y) < x < \psi(y)\}$$

という形をしている場合にも Green の定理が成り立つことが示される．さらに，領域  $D$  がこのような形をしている有限個の領域に分割できる場合も，Green の定理が成り立つことが分かる．

定義 7.3  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の領域,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  を  $\Omega$  で定義された連続なベクトル場とする.  $\mathbf{u}$  が  $\Omega$  においてスカラーポテンシャル (あるいは単に, ポテンシャル) をもつとは, スカラー場  $f \in C^1(\Omega)$  が存在して

$$\mathbf{u} = \text{grad } f = \nabla f \quad \text{すなわち} \quad u_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (1 \leq j \leq n)$$

が成り立つときをいう. このとき, スカラー場  $f$  をベクトル場  $\mathbf{u}$  のスカラーポテンシャル (あるいは単に, ポテンシャル) という.

定義 7.4  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^3$  の領域,  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$  を  $\Omega$  で定義された連続なベクトル場とする.  $\mathbf{B}$  が  $\Omega$  においてベクトルポテンシャルをもつとは,  $C^1$  級のベクトル場  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$  が存在して

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

が成り立つときをいう. このとき, ベクトル場  $\mathbf{A}$  をベクトル場  $\mathbf{B}$  のベクトルポテンシャルという.

例 7.1 (1) 3次元空間における鉛直下向きの一様な重力場  $\mathbf{F}$  を考えよう. このような重力場  $\mathbf{F}$  は

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -g\mathbf{e}_3$$

で与えられる. ここで,  $g$  は重力加速度であり,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  は鉛直上向きの単位ベクトルである. このとき,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla(-gx_3)$$

であるから,  $\mathbf{F}$  はポテンシャル  $-gx_3$  をもつ. なお, 物理ではこのポテンシャルの符号を変えた  $gx_3$  を重力ポテンシャルと呼んでいる.

(2) 3次元空間における質量  $M$  の質点による万有引力が作り出す力の場  $\mathbf{F}$  は

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -MG \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

で与えられる. ここで,  $G$  は万有引力定数であり,  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  である. このとき,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla \left( MG \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \right)$$

であるから,  $\mathbf{F}$  はポテンシャル  $MG \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$  をもつ. 物理ではこの場合も, このポテンシャルの符号を変えた  $-MG \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$  を万有引力のポテンシャルと呼んでいる.

力の場  $\mathbf{F}$  がポテンシャルをもつとき, その力はポテンシャル力あるいは保存力であると言う. 時刻  $t$  において位置  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  にいる質量  $m$  の質点がポテンシャル力  $\mathbf{F} = -\nabla f$  の下で運動しているとしよう. このとき, 運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}(t) = m \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = -m(\nabla f)(\mathbf{x}(t))$$

すなわち,

$$m \frac{d^2 x_j}{dt^2}(t) = -m \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t)) \quad (1 \leq j \leq 3)$$

で与えられる．このとき，上式と合成関数の微分法より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) \right\|^2 \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^3 \left( \frac{dx_j}{dt}(t) \right)^2 \right) = \sum_{j=1}^3 m \frac{d^2 x_j}{dt^2}(t) \frac{dx_j}{dt}(t) \\ &= - \sum_{j=1}^3 m \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t)) \frac{dx_j}{dt}(t) = - \frac{d}{dt} (m f(\mathbf{x}(t)))\end{aligned}$$

が成り立つ．特に，

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) \right\|^2 + m f(\mathbf{x}(t)) \right) = 0$$

となり，

$$\frac{1}{2} m \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) \right\|^2 + m f(\mathbf{x}(t)) \equiv \text{定数}$$

が得られる．物理では，この式は力学的エネルギーの保存則と呼ばれており，この左辺第1項目は運動エネルギー，第2項目は位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）である．

定理 7.2  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の領域， $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  を  $\Omega$  で定義された連続なベクトル場とし， $\Omega$  においてポテンシャル  $f$  を持つとする．このとき，点  $\mathbf{x}_0$  から点  $\mathbf{y}_0$  へ向かう  $\Omega$  内の任意の  $C^1$  級の曲線  $C$  に対して，

$$\int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = f(\mathbf{y}_0) - f(\mathbf{x}_0)$$

が成り立つ．

証明 仮定より， $\mathbf{u} = \nabla f$  が成り立っている．さて，曲線  $C$  は

$$C: \mathbf{x} = \varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

とパラメーター表示されているとする．このとき， $\varphi(a) = \mathbf{x}_0$  および  $\varphi(b) = \mathbf{y}_0$  が成り立っていることに注意しよう．線積分の定義および合成関数の微分法から

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{u}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^b (\nabla f)(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) dt = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) \\ &= f(\mathbf{y}_0) - f(\mathbf{x}_0)\end{aligned}$$

となり，望みの式が示された（証明終）

このことから，ポテンシャルをもつベクトル場に対する線積分の値は，線分路  $C$  の途中経路によらず，始点と終点のみで決まることが分かる．力の場  $F$  の下，物体が曲線  $C$  に沿って動いた時，その力が物体にした仕事  $W$  は

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

で与えられる．定理 7.2 より，力の場が保存力になっていれば，その力がする仕事は物体の動いた経路によらず，始点と終点の位置エネルギーの差で与えられることが分かる．