

1 $I = (0, 1)$ を开区間とし,

$$B^m(I) := \{u \in C^m(I); |u|_{m,I} < +\infty\} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$B^\infty(I) := \{u \in C^\infty(I); |u|_{m,I} < +\infty \ (\forall m = 0, 1, 2, \dots)\}$$

と定める. ただし,

$$|u|_{m,I} := \sum_{l=0}^m \sup_{0 < x < 1} |u^{(l)}(x)| \quad \left(u^{(l)} = \frac{d^l u}{dx^l}\right)$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 任意の $u, v \in B^m(I)$ および $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して,

$$|u + v|_{m,I} \leq |u|_{m,I} + |v|_{m,I}, \quad |\alpha u|_{m,I} = |\alpha| |u|_{m,I}$$

が成り立つことを示せ (明らかに $|u|_{m,I} = 0 \Leftrightarrow u = 0$ であるから, これより $B^m(I)$ が $|\cdot|_{m,I}$ をノルムとするノルム空間であること, $B^\infty(I)$ がベクトル空間であることが分かる.)

(2) $B^0(I)$ が $|\cdot|_{0,I}$ をノルムとする Banach 空間であることを示せ. ただし, 「連続関数列の一様収束極限は再び連続関数になる」という事実は証明抜きで用いてもよい.

(3) $B^m(I)$ が $|\cdot|_{m,I}$ をノルムとする Banach 空間であることを示せ.

(4) $B^\infty(I)$ が $\{|\cdot|_{m,I}\}_{m=0}^\infty$ をノルムの列とする Fréchet 空間であることを示せ.

レポート作成上の注意

- A 4 版のレポート用紙を使用し, 表紙を付けること. 表紙には科目名, レポート番号, 学籍番号, 氏名を記入すること. レポートの左上をホチキス留めすること.
- 最終的な答えだけでなく, 途中計算を分かりやすく説明すること.
- ワードプロ, $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 等は使用せず, 手書きで (丁寧な字で) 作成すること.
- レポートは 11 月 4 日の講義終了後に回収する.