数学解析第１　第９回講義ノート

6　ベクトル場とスカラー場

この節と次節において，ベクトル解析の基本的な事項を解説する．まず，実数値関数に対する勾配，および $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数に対する発散および回転，さらにはそれらに作用する Laplace 作用素を定義しよう．

定義 6.1 Ω を $\mathbf{R}^3$ における領域，$f = f(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3))$ を Ω で定義された実数値関数，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), u_3(\boldsymbol{x}))$ を Ω で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数とし，それらは C^1 級であるとする．

(1) f の勾配 (gradient) を次式で定める．

$$\operatorname{grad} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$$

これは，ナブラと呼ばれる記号 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ を用いて，∇f とも書かれる．

(2) $\boldsymbol{u}$ の発散 (divergence) を次式で定める．

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} := \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

これは $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ とも書かれる．

(3) $\boldsymbol{u}$ の回転 (rotation) を次式で定める．

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

これは $\nabla \times \boldsymbol{u}$ あるいは $\operatorname{curl} \boldsymbol{u}$ とも書かれる．

(4) f および $\boldsymbol{u}$ が C^2 級であるとき，それらに作用する Laplace 作用素 (Laplacian)Δ を

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}, \qquad \Delta \boldsymbol{u} := (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$$

で定める．

注意 (1) ナブラ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ を形式的にベクトルのように思い，内積 $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ や外積 $\nabla \times \boldsymbol{u}$ を計算すれば，$\boldsymbol{u}$ の発散や回転が計算できる．その意味で，ナブラを用いた記号の便利さが理解できよう．また，外積の定義を覚えるには次のようにすればよい．$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を標準基底とし，行列の展開公式（第１行目を展開）を用いて

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \boldsymbol{u} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ u_3 & u_1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

と計算すればよい．

(2) 流体力学においては，$\boldsymbol{u}$ が流体の速度場を表わすとき，その回転 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ を渦度 (vorticity) と呼ぶ．

次に，空間内におけるスカラー場とベクトル場を定義しよう．それらを数学的に厳密に定義するためには，空間とは何か？ベクトルとは何か？内積とは何か？を明確に定義しておかなければならない．そのための一つの方法は，空間をアフィン (affine) 空間として扱えばよいが，ここでは深入りするのは避け，素朴に考えることにする．

定義 6.2 空間内の各点 P に対してスカラー（実数あるいは複素数）$F(P)$ およびベクトル $\boldsymbol{U}(P)$ が与えられているとき，F および $\boldsymbol{U}$ をそれぞれスカラー場およびベクトル場という．

これだけでは，単に実数値関数や $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数がスカラー場やベクトル場だと思う人がいるかもしれないが，それは誤りである．スカラー場やベクトル場を $\mathbf{R}^3$ 上で定義された実数値関数や $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数と見なすためには，空間内に座標の基準点 O と正規直交基底 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ を定めることにより直交座標系 $(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ を導入しなければならない．このとき，空間内の任意の点 P に対して

$$\overrightarrow{OP} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \tag{6.1}$$

を満たす $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ がただ一つ定まる．この $\boldsymbol{x}$ を点 P の座標と呼び，空間と 3 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ とを同一視する．このとき

$$f(\boldsymbol{x}) := F(P) \tag{6.2}$$

とおき，スカラー場 F とスカラー値関数 f とを同一視する．さらに，

$$\boldsymbol{U}(P) = u_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_1 + u_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_2 + u_3(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_3 \tag{6.3}$$

により $\mathbf{R}^3$ に値をとるベクトル値関数 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), u_3(\boldsymbol{x}))$ を定め，ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ とベクトル値関数 $\boldsymbol{u}$ とを同一視する．

このように，スカラー場 F やベクトル場 $\boldsymbol{U}$ をスカラー値関数 f やベクトル値関数 $\boldsymbol{u}$ と同一視するには，直交座標系 $(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ を決めなければならない．ところが，座標系の取り方は無限に存在する．したがって座標系の選び方には任意性があるが，定義よりスカラー場やベクトル場はこのような座標系の取り方に依存するような量であってはならない．どの直交座標系を使っても必ず同じスカラーやベクトルが得られるとき，それらをスカラー場，ベクトル場と呼ぶのである．

このように説明されても，まだピンとこないかもしれない．次に，スカラー場 F の勾配 $\mathrm{grad}\,F$，ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ の発散 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{U}$ と回転 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{U}$ を定義し，$\mathrm{grad}\,F$ がベクトル場，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{U}$ がスカラー場になることを示そう．その証明を見れば，場という言葉の意味が理解できるであろう．なお，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{U}$ は上の意味ではベクトル場にはならない．右手系と左手系の選び方の違いにより符号の違いが出て来てしまうからである．このようなものは軸性ベクトル場と呼ばれている．