数学解析第１　第１０回講義ノート

スカラー場 F とベクトル場 $\boldsymbol{U}$ が与えられた時，これらを適当な直交座標系 $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ を用いて表示する．直交座標系の取り方には任意性があるが，他の直交座標系 $(O';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3)$ を用いて表示した場合との関係を調べよう．次の補題が成り立つことを確かめるのは線形代数のよい復習になるであろう．

補題 6.1 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ および $(\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3)$ を正規直交基底，すなわち

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}'_j=\delta_{ij}:=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

を満たしているとし，行列 $T=(t_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ を $t_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}'_j$ で定める．このとき，T は直交行列であり，$\boldsymbol{e}_i=\sum_{j=1}^{3}t_{ij}\boldsymbol{e}'_j$ および $\boldsymbol{e}'_i=\sum_{j=1}^{3}t_{ji}\boldsymbol{e}_j$ が成り立つ．

補題 6.2 補題 6.1 の仮定に加え，O,O' を空間内の 2 点とし，ベクトル $\overrightarrow{OO'}$ の基底 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ を用いたときの成分を $\boldsymbol{a}={}^t(a_1,a_2,a_3)$ とし，ベクトル $\overrightarrow{O'O}$ の基底 $(\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3)$ を用いたときの成分を $\boldsymbol{b}={}^t(b_1,b_2,b_3)$ とする．すなわち，

$$\overrightarrow{OO'}=\sum_{j=1}^{3}a_j\boldsymbol{e}_j,\qquad \overrightarrow{O'O}=\sum_{j=1}^{3}b_j\boldsymbol{e}'_j$$

また，空間内の任意の点 P に対して，直交座標系 $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ に関する P の座標を $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,x_2,x_3)$ とし，直交座標系 $(O';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3)$ に関する P の座標を $\boldsymbol{y}={}^t(y_1,y_2,y_3)$ とする．すなわち，

$$\overrightarrow{OP}=\sum_{j=1}^{3}x_j\boldsymbol{e}_j,\qquad \overrightarrow{O'P}=\sum_{j=1}^{3}y_j\boldsymbol{e}'_j \tag{6.1}$$

このとき，$\boldsymbol{a}=-T\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ が成り立つ．

補題 6.2 の等式については次のようにして得られる．補題 6.1 の結果を用いて

$$\sum_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{e}_i=\overrightarrow{OO'}=-\overrightarrow{O'O}=-\sum_{j=1}^{3}b_j\boldsymbol{e}'_j=-\sum_{j=1}^{3}b_j\left(\sum_{i=1}^{3}t_{ij}\boldsymbol{e}_i\right)=\sum_{i=1}^{3}\left(-\sum_{j=1}^{3}t_{ij}b_j\right)\boldsymbol{e}_i$$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{e}_i=\sum_{i=1}^{3}\left(-\sum_{j=1}^{3}t_{ij}b_j\right)\boldsymbol{e}_i$$

と書き直そう．$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ が基底であったことから，

$$a_i=-\sum_{j=1}^{3}t_{ij}b_j=-(T\boldsymbol{b})_i\quad(1\leq i\leq 3)$$

となり，$\boldsymbol{a}=-T\boldsymbol{b}$ が得られる．他の式も同様である．

以上の準備の下，スカラー場 F およびベクトル場 $\boldsymbol{U}$ が与えられた時，F の勾配 $\mathrm{grad}\,F$ および $\boldsymbol{U}$ の発散 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{U}$ が，それぞれベクトル場およびスカラー場として定義出来ることを示そう．

定理 6.1 スカラー場 F が与えられた時，直交座標系 $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ および $(O';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3)$ に関する F の表示を，補題 6.2 における記号を用いて，それぞれ $f(\boldsymbol{x})$ および $g(\boldsymbol{y})$ としよう．すなわち，(6.1) 式における記号の下

$$F(P)=f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{y})$$

とする．このとき，次式が成り立つ．

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_j=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial g}{\partial y_j}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}'_j$$

証明 補題 6.1 および 6.2 より

$$g(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})=f(T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a})=f\big(\sum_{i=1}^{3}t_{1i}y_i+a_1,\sum_{i=1}^{3}t_{2i}y_i+a_2,\sum_{i=1}^{3}t_{3i}y_i+a_3\big)$$

この両辺を y_j で偏微分すると，合成関数の微分法より

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y_j}(\boldsymbol{y})&=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_k}\big(\sum_{i=1}^{3}t_{1i}y_i+a_1,\sum_{i=1}^{3}t_{2i}y_i+a_2,\sum_{i=1}^{3}t_{3i}y_i+a_3\big)\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sum_{i=1}^{3}t_{ki}y_i+a_k\right)\\&=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})t_{kj}\end{aligned}$$

したがって，補題 6.1 より

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial g}{\partial y_j}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}'_j=\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})t_{kj}\right)\boldsymbol{e}'_j=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})\left(\sum_{j=1}^{3}t_{kj}\boldsymbol{e}'_j\right)=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_k$$

が得られる．(証明終)

この定理により，スカラー場 F の勾配 $\operatorname{grad}F$ がベクトル場として

$$\operatorname{grad}F(P):=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_j \tag{6.2}$$

により定義される．

定理 6.2 ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ が与えられた時，直交座標系 $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ および $(O';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3)$ に関する $\boldsymbol{U}$ の表示を，補題 6.2 における記号を用いて，それぞれ $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=(u_1(\boldsymbol{x}),u_2(\boldsymbol{x}),u_3(\boldsymbol{x}))$ および $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})=(v_1(\boldsymbol{y}),v_2(\boldsymbol{y}),v_3(\boldsymbol{y}))$ としよう．すなわち，(6.1) 式における記号の下

$$\boldsymbol{U}(P)=\sum_{j=1}^{3}u_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_j=\sum_{j=1}^{3}v_j(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}'_j$$

とする．このとき，次式が成り立つ．

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial y_j}(\boldsymbol{y})$$

証明　まず，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$ の関係を導こう．補題 6.1 より

$$\sum_{j=1}^{3} v_j(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}'_j = \sum_{i=1}^{3} u_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} u_i(\boldsymbol{x})\left(\sum_{j=1}^{3} t_{ij}\boldsymbol{e}'_j\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} u_i(\boldsymbol{x})t_{ij}\right)\boldsymbol{e}'_j$$

ここで，$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ が基底であったことと補題 6.2 より

$$v_j(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{3} u_i(\boldsymbol{x})t_{ij} = \sum_{i=1}^{3} u_i(T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a})t_{ij}$$

が得られる．この両辺を y_j で偏微分すると，合成関数の微分法より

$$\frac{\partial v_j}{\partial y_j}(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})t_{kj}\right)t_{ij}$$

したがって，補題 6.1 より

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial y_j}(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})\left(\sum_{j=1}^{3} t_{kj}t_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})\delta_{kj} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

が得られる．(証明終)

この定理により，ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ の発散 $\operatorname{div}\boldsymbol{U}$ がスカラー場として

$$\operatorname{div}\boldsymbol{U}(P) := \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \tag{6.3}$$

により定義される．

ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ の回転 $\operatorname{rot}\boldsymbol{U}$ は，上で見て来たような意味ではベクトル場にはならない．正確には，座標系の変換において現れる行列 T の行列式 $\det T$ 倍だけのずれが生じる．行列 T は直交行列であったから，その行列式の値は $\det T = \pm 1$ に限られる．$\det T = 1$ の場合，その座標系の変換は**向きを保つ**という．向きを保つ変換だけに制限をすれば，ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ の回転 $\operatorname{rot}\boldsymbol{U}$ もまたベクトル場になる．このようなベクトル場は，軸性ベクトル場と呼ばれる．物理的には，座標系を右手系あるいは左手系のどちらか一方に制限することに対応する．以上のことを，定理の形で正確に述べよう．その為に，簡単な補題を一つ準備しておく．

補題 6.3　直交行列 $T = (t_{ij})_{1\le i,j\le 3}$ に対して次式が成り立つ．

$$T = (\det T)\begin{pmatrix} t_{22}t_{33} - t_{23}t_{32} & t_{23}t_{31} - t_{21}t_{33} & t_{21}t_{32} - t_{22}t_{31} \\ t_{32}t_{13} - t_{33}t_{12} & t_{33}t_{11} - t_{31}t_{13} & t_{31}t_{12} - t_{32}t_{11} \\ t_{12}t_{23} - t_{13}t_{22} & t_{13}t_{21} - t_{23}t_{11} & t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} \end{pmatrix}$$

証明 T が直交行列であることと，余因子行列を用いた逆行列の公式より

$$T = \left({}^tT\right)^{-1} = \frac{1}{\det {}^tT} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} t_{22} & t_{32} \\ t_{23} & t_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} t_{21} & t_{31} \\ t_{23} & t_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} t_{21} & t_{31} \\ t_{22} & t_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} t_{12} & t_{32} \\ t_{13} & t_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} t_{11} & t_{31} \\ t_{13} & t_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} t_{11} & t_{31} \\ t_{12} & t_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} t_{12} & t_{22} \\ t_{13} & t_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{13} & t_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} t_{22}t_{33} - t_{23}t_{32} & t_{23}t_{31} - t_{21}t_{33} & t_{21}t_{32} - t_{22}t_{31} \\ t_{32}t_{13} - t_{33}t_{12} & t_{33}t_{11} - t_{31}t_{13} & t_{31}t_{12} - t_{32}t_{11} \\ t_{12}t_{23} - t_{13}t_{22} & t_{13}t_{21} - t_{23}t_{11} & t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} \end{pmatrix}$$

これと $(\det T)^2 = 1$ より望みの式が従う.（証明終）

定理 6.3 ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ が与えられた時，直交座標系 $(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ および $(O'; \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ に関する $\boldsymbol{U}$ の表示を，補題 6.2 における記号を用いて，それぞれ $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), u_3(\boldsymbol{x}))$ および $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}) = (v_1(\boldsymbol{y}), v_2(\boldsymbol{y}), v_3(\boldsymbol{y}))$ としよう．このとき，次式が成り立つ.

$$\sum_{j=1}^{3} \big(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\big)_j \boldsymbol{e}_j = (\det T) \sum_{j=1}^{3} \big(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})\big)_j \boldsymbol{e}'_j$$

ただし，$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}$ は定義 6.1 の意味でのベクトル値関数の回転であり，$(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u})_j$ はその第 j 成分を表わす.

証明 定理 6.2 の証明において

$$v_j(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{3} u_k(T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{a}) t_{kj} \qquad (1 \le j \le 3)$$

を示した．この両辺を y_i で偏微分すると，合成関数の微分法より

$$\frac{\partial v_j}{\partial y_i}(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\boldsymbol{x}) t_{li} \right) t_{kj} \qquad (1 \le i, j \le 3)$$

これより

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3}{\partial y_2}(\boldsymbol{y}) - \frac{\partial v_2}{\partial y_3}(\boldsymbol{y}) &= \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\boldsymbol{x}) \big(t_{l2}t_{k3} - t_{l3}t_{k2}\big) \\ &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) \right) (t_{22}t_{33} - t_{23}t_{32}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \right) (t_{32}t_{13} - t_{33}t_{12}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \right) (t_{12}t_{23} - t_{13}t_{22}) \end{aligned}$$

したがって，補題 6.3 より

$$\begin{aligned}(\det T)\bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})\bigr)_1 &= \bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_1(\det T)\bigl(t_{22}t_{33}-t_{23}t_{32}\bigr)\\ &\quad+\bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_2(\det T)\bigl(t_{32}t_{13}-t_{33}t_{12}\bigr)\\ &\quad+\bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_3(\det T)\bigl(t_{12}t_{23}-t_{13}t_{22}\bigr)\\ &= \bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_1 t_{11}+\bigl(\operatorname{rot},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_2 t_{21}+\bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_3 t_{31}\\ &= \sum_{k=1}^{3}\bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_k t_{k1}\end{aligned}$$

同様にして

$$(\det T)\bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})\bigr)_j=\sum_{k=1}^{3}\bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_k t_{kj}\qquad(1\le j\le 3)$$

が示される．これと補題 6.1 より

$$\begin{aligned}(\det T)\sum_{j=1}^{3}\bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})\bigr)_j\mathbf{e}'_j &= \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_k t_{kj}\right)\boldsymbol{e}'_j=\sum_{k=1}^{3}\bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_k\left(\sum_{j=1}^{3}t_{kj}\boldsymbol{e}'_j\right)\\ &= \sum_{k=1}^{3}\bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\bigr)_k\boldsymbol{e}_k\end{aligned}$$

となり，望みの式が得られた.（証明終）

上の証明はやや込み入っているという印象を受けるであろう．形式的にはなるが，以下のような見通しのよい計算法もある．補題 6.1 および

$$u_j(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{3}t_{jk}v_k(\boldsymbol{y}),\qquad \frac{\partial}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_k}=\sum_{k=1}^{3}t_{jk}\frac{\partial}{\partial y_k}$$

より

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= \begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ u_1(\boldsymbol{x}) & u_2(\boldsymbol{x}) & u_3(\boldsymbol{x})\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}\sum_{k=1}^{3}t_{1k}\mathbf{e}'_k & \sum_{k=1}^{3}t_{2k}\mathbf{e}'_k & \sum_{k=1}^{3}t_{3k}\mathbf{e}'_k\\ \sum_{k=1}^{3}t_{1k}\frac{\partial}{\partial y_k} & \sum_{k=1}^{3}t_{2k}\frac{\partial}{\partial y_k} & \sum_{k=1}^{3}t_{3k}\frac{\partial}{\partial y_k}\\ \sum_{k=1}^{3}t_{1k}v_k(\boldsymbol{y}) & \sum_{k=1}^{3}t_{2k}v_k(\boldsymbol{y}) & \sum_{k=1}^{3}t_{3k}v_k(\boldsymbol{y})\end{vmatrix}\\ &= \left|\begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3\\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3}\\ v_1(\boldsymbol{y}) & v_2(\boldsymbol{y}) & v_3(\boldsymbol{y})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_{11} & t_{21} & t_{31}\\ t_{12} & t_{22} & t_{32}\\ t_{13} & t_{23} & t_{33}\end{pmatrix}\right|\\ &= \begin{vmatrix}\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3\\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3}\\ v_1(\boldsymbol{y}) & v_2(\boldsymbol{y}) & v_3(\boldsymbol{y})\end{vmatrix}\begin{vmatrix}t_{11} & t_{21} & t_{31}\\ t_{12} & t_{22} & t_{32}\\ t_{13} & t_{23} & t_{33}\end{vmatrix}\\ &= \bigl(\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})\bigr)(\det T)\end{aligned}$$

次に，スカラー場の勾配の意味をもう少し説明しよう．そのために，まず方向微分を定義する．

定義 6.3 Ω を $\mathbf{R}^n$ における領域，$\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$，$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ を単位ベクトルとし，$f = f(\boldsymbol{x})$ を Ω で定義された関数とする．このとき，f の $\boldsymbol{x}_0$ における $\boldsymbol{a}$ 方向の**方向微分**を次式で定義する．

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{h}$$

すなわち，方向微分とは関数 f を $\boldsymbol{x}_0$ を通り $\boldsymbol{a}$ に平行な直線上での 1 変数関数と見なした時の $\boldsymbol{x}_0$ における微分係数（変化率）を表わしている．f が C^1 級の関数であれば方向微分は常に存在し，合成関数の微分法より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}) \bigg|_{t=0} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}) a_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}) a_n \bigg|_{t=0} \\
&= \boldsymbol{a} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}_0)
\end{aligned}$$

となる．この式と Cauchy–Schwarz の不等式より

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0) \right| \leq \|\boldsymbol{a}\| \|\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\| = \|\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\|$$

が成り立つ．また，この不等式で等号が成り立つのは $\|\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\|$ が $\boldsymbol{a}$ に平行な時に限られる．このことから，f の勾配 ∇f に対する次の性質が分かる．

- $\nabla f(\boldsymbol{x})$ の向きは，$f(\boldsymbol{x})$ の変化が最大になる向きであり，$\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|$ はその変化の大きさを表わす．

次に，方程式 $f(\boldsymbol{x}) = c$ (c は定数) で表わされる n 次元 Euclid 空間内の超曲面を考えよう．例えば，$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ の場合，その超曲面は原点を中心とする半径 $\sqrt{c}$ ($c > 0$) の球面の族を表わす．このとき，f の勾配 ∇f に対する次の性質も分かる．

- $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ は，$f(\boldsymbol{x}) = c$ で表わされる曲面の $\boldsymbol{x}_0$ における法線ベクトルである．

これを示すために，曲面 $f(\boldsymbol{x}) = c$ 上の曲線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ ($-1 < t < 1$) で $\boldsymbol{x}_0$ を通るものを考える．$\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{x}_0$ とすれば，$\boldsymbol{\varphi}'(0) = (\varphi_1'(0), \ldots, \varphi_n'(0))$ は $\boldsymbol{x}_0$ における曲面の接ベクトルになる．曲線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ の取り方を変えることにより，$\boldsymbol{\varphi}'(0)$ は $\boldsymbol{x}_0$ における任意の接ベクトルを取りうる．さて，曲線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ が曲面 $f(\boldsymbol{x}) = c$ 上にあることから，

$$f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) = c \quad (-1 < t < 1)$$

が成り立つ．この両辺を t で微分すると，合成関数の微分法より

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \varphi_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \varphi_n'(t) = 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{\varphi}'(t) \cdot \nabla f(\boldsymbol{\varphi}(t)) = 0$$

ここで $t=0$ とすると，$\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{x}_0$ より

$$\boldsymbol{\varphi}'(0)\cdot\nabla f(\boldsymbol{x}_0)=0$$

これは $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ が $\boldsymbol{x}_0$ における任意の接ベクトルと直交することを意味している．したがって，$\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ は法線ベクトルであることが分かる．

例　3 次元 Euclid 空間内におけるグラフ状の曲面 $z = h(x,y)$ を考えよう．$f(x,y,z) := z-h(x,y)$ とおくと，この曲面は $f(x,y,z)=0$ と表わされる．したがって，曲面上の点 $(x,y,h(x,y))$ における法線ベクトルは

$$(\nabla f)(x,y,h(x,y))=\bigl(-h_x(x,y),-h_y(x,y),1\bigr)$$

の定数倍で与えられる．特に，単位法線ベクトルは

$$\pm\frac{\bigl(-h_x(x,y),-h_y(x,y),1\bigr)}{\sqrt{\bigl(h_x(x,y)\bigr)^2+\bigl(h_y(x,y)\bigr)^2+1}}$$

となる．