２０１３年度　数学Ａ３・Ｂ３

慶應義塾大学 理工学部

目 次

第I部

数学Ａ３

第0章　準備

0.1　記号

まず集合に関する記号を思い出しておこう.

- $x \in X$ または $X \ni x$: x は集合 X に属する（x を集合 X の元あるいは要素という）
- $x \notin X$ または $X \not\ni x$: x は集合 X に属さない
- $X \subset Y$ または $Y \supset X$: X は Y の部分集合（「$x \in X$ ならば $x \in Y$」が成り立つこと）
- $\{x \in X \,|\, Q(x)\}$: 命題 $Q(x)$ が真となる $x \in X$ 全体の集合（$\{x \,|\, Q(x)\}$ とも書かれる）
- $X \cap Y = \{x \,|\, x \in X$ かつ $x \in Y\}$: 集合 X と Y の共通部分
- $X \cup Y = \{x \,|\, x \in X$ または $x \in Y\}$: 集合 X と Y の和集合
- $X \setminus Y = \{x \,|\, x \in X$ かつ $x \notin Y\}$: 集合 X と Y の差集合

また，要素をもたない集合を空集合といい $\emptyset$ とかく．部分集合の定義から分かるように，$X \subset Y$ を示すためには，X に属する任意の元 x が Y に属することを示せばよい．２つの集合 X, Y の元がすべて一致しているとき X と Y は等しいといい $X = Y$ と書くが，これは「$X \subset Y$ および $Y \subset X$ が成り立つ」ことである．したがって，２つの集合 X, Y が等しいことを示すためには，X に属する任意の元 x が Y に属し，かつ Y に属する任意の元 y が X に属することを示せばよい.

非常に重要で普遍的な数の集合を以下の記号を用いて表す.

- $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: 自然数全体の集合
- $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$: 整数全体の集合
- $\mathbf{Q} = \{\frac{n}{m} \,|\, n, m \in \mathbf{Z}, m \neq 0\}$: 有理数全体の集合
- $\mathbf{R}$: 実数全体の集合
- $\mathbf{C} = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbf{R}\}$: 複素数全体の集合（ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位）

自然数，実数，複素数をそれぞれ英訳すると，Natural number, Real number, Complex number となるが，それらの頭文字を太字にした $\mathbf{N}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ という記号が用いられる．また，整数の英訳は Integer であるが，この場合ドイツ語訳した Zahlen の頭文字を太字にした記号 $\mathbf{Z}$ が用いられる．さらに，有理数の英訳は Rational number であるが，この場合は商の英訳である Quotient の頭文字を太字にした記号 $\mathbf{Q}$ が用いられる．これらの文字を板書するときは中抜きの太字を用いるので，最近の書物や論文では，黒板太字と呼ばれる書体 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ が用いられる場合が多い.

$a < b$ を満たす任意の実数 a, b に対して，

- $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \,|\, a < x < b\}$：開区間
- $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$：閉区間
- $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \,|\, a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \,|\, a < x \leq b\}$：半開区間

開区間，閉区間，半開区間を総称して区間という．端点が含まれない（開いている）場合は丸括弧が使われ，端点が含まれる（閉じている）場合は角括弧が使われる．本書では，高校までで使用していた不等号の記号 $\leqq, \geqq$ を，それぞれ $\leq, \geq$ と書ことにする．上の区間の記法において，右端点が開いている場合 $b = \infty$，左端点が開いている場合 $a = -\infty$ と書くことも許す．その場合，$(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \,|\, a < x\}$，$(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x \leq b\}$，$(-\infty, \infty) = \mathbf{R}$ 等となる．稀であるが，丸括弧の代りに左右を逆転させた角括弧を用いて，開区間 (a, b) を $]a, b[$，半開区間 $[a, b)$ を $[a, b[$ 等と書くときもある．

その他の記号としては，

- $n! = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$：$n$ の階乗（ただし，便宜上 $0! = 1$ とする）
- $\displaystyle \binom{n}{k} = {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$：二項係数（ただし，$k = 0, 1, \ldots, n$）
- $\displaystyle (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$：二項定理
- $A := B$：A を B で定める（B を A と略記する）

これらの記号以外にも様々な記号が使われるが，それらはそのつど説明する．

0.2　論理記号と公理

X を集合とし，X の各元 $x \in X$ に対して $Q(x)$ を x に関する命題とする．このとき，

「任意の $x \in X$ に対して，命題 $Q(x)$ は真である」

という命題は**全称命題**と呼ばれており次のように略記する：

- $\forall x \in X \ Q(x)$
- $Q(x) \ (\forall x \in X)$

また，

「命題 $Q(x)$ が真となるような $x \in X$ が存在する」

という命題は**存在命題**と呼ばれており次のように略記する：

- $\exists x \in X \ Q(x)$
- $\exists x \in X$ s.t. $Q(x)$

ここで見慣れない記号 $\forall$ および $\exists$ が現れている．$\forall$ は**全称記号**，$\exists$ は**存在記号**と呼ばれ,「任意の（すべての)」および「存在する」に対応する英単語である「Any (All)」および「Exist」の頭文字を 180 度回転させたものである．これらは**論理記号**と呼ばれているもので，厳密な数学を展開する際に頻繁に使われる記号である．また，s.t. は英語の such that の省略形である．

このような論理記号を使うことの利点は，記述の簡略化および明確化であって，曖昧な表現を排除するのに役立ち，厳密な数学を展開するのに非常に有用である．その一方で，初めのうちはその使い方に戸惑い，難解な記号という印象を持つかもしれないが，これから様々な所で使用するうちに慣れてきて，とても便利な記号であることが分かるであろう．

このような論理記号は組み合わせて使われる場合が多い．すなわち，上の命題 $Q(x)$ の中にも論理記号 $\forall$ あるいは $\exists$ が使われるのである．例えば，命題 $Q(x)$ が $x \in X$ および $y \in Y$ に関する命題 $P(x, y)$ を用いて

$$Q(x) \equiv \exists y \in Y \ P(x, y)$$

と書かれているとしよう．ここで，$\equiv$ は左右 2 つの命題が同義である（真偽が一致する）という意味の記号であり，命題の等号のようなものである．このとき,「$\forall x \in X \ Q(x)$」という命題は

$$\forall x \in X \ \exists y \in Y \ P(x, y) \tag{0.1}$$

と書かれる．

さて，この命題における「$\forall x \in X$」および「$\exists y \in Y$」の順番を形式的に入れ替えて，

$$\exists y \in Y \ \forall x \in X \ P(x, y) \tag{0.2}$$

という命題を作ってみる．このとき，これら 2 つの命題 (0.1) および (0.2) の意味は異なることに注意しよう．命題 (0.1) は「任意の $x \in X$ に対して，それに応じて適当な $y \in Y$ を取ってくれば命題 $P(x, y)$ が成り立つ」と言っているのに対し，命題 (0.2) は「$x \in X$ に無関係なある $y \in Y$ が存在して，任意の $x \in X$ に対して命題 $P(x, y)$ が成り立つ」と言っている．すなわち，命題 (0.1) における y は一般には x に依存しており x を変えれば y もそれに応じて変わるのに対し，命題 (0.2) における y は x に無関係である．それゆえ，命題 (0.2) が真であれば命題 (0.1) も真であることが分かるが，その逆は一般には成り立たない．

一例を挙げよう．集合 X および Y を自然数全体の集合 $\mathbf{N}$ とし，命題 $P(x, y)$ を $x < y$ とする．この場合，任意の $x \in \mathbf{N}$ に対して $y := x + 1$ と定めると，$y \in \mathbf{N}$ であり，かつ $x < y$ が成り立つので，命題 (0.1) は真である．それに対して，任意の $x \in \mathbf{N}$ に対して $x < y$ が成り立つような x に無関係な $y \in \mathbf{N}$ は存在しないので，命題 (0.2) は偽である．

命題 Q の否定命題を $\neg Q$ と書くことにする．

公理 0.1　X を集合とし，$Q(x)$ を $x \in X$ に関する命題とする．

(1)　$\neg(\forall x \in X \ Q(x)) \equiv \exists x \in X \ \neg Q(x)$
(2)　$\neg(\exists x \in X \ Q(x)) \equiv \forall x \in X \ \neg Q(x)$

数学における様々な理論は幾つかの基本的な命題が真であることを前提とし，それを出発点として理論を展開していく．それらの前提となる命題のことを，その理論における**公理**と呼ぶ．

もう少し噛み砕いて説明しよう．証明という操作は何をしているのであるか？ある命題が正しいことを説明するために，既知の事柄（命題）から三段論法などの推論方法を用いてその命題を導く操作が証明である．したがって，証明では既知の命題を用いる必要がある．しかし，その既知の命題自身も正しいかどうかを確かめないといけない訳で，そうなると別の既知の命題を用いて証明を与えることになる．このようにして，より根源的・普遍的な命題を既知として証明を与えるのであるが，ある程度その操作を続けると，もう当たり前すぎて証明するにもどうしたらいいのか分からなくなるような命題にまで遡ってしまう．そこで，そのような根源的・普遍的な命題は真であると仮定してしまうのである．そのように，真であると仮定された命題が公理である．

上の公理は全称命題および存在命題の否定に関する公理である．$\neg(\forall x \in X\ Q(x))$ は,「すべての $x \in X$ に対して $Q(x)$ は真」ということはない，すなわち「必ずしも $Q(x)$ は真ではない」という部分否定である．それに対して，$\neg(\exists x \in X\ Q(x))$ は,「$Q(x)$ が真となる $x \in X$ が存在する」ことはない，すなわち「どんな場合にも $Q(x)$ は真とならない」という全否定である．

論理記号に慣れないうちは，全称命題 $(\forall x \in X\ Q(x))$ の否定を全否定 $(\forall x \in X\ \neg Q(x))$ にしたり，存在命題 $(\exists x \in X\ Q(x))$ の否定を部分否定 $(\exists x \in X\ \neg Q(x))$ にしたりするが，それらは誤りである．否定をとると，$\forall$ は $\exists$ に変わり，$\exists$ は $\forall$ に変わる，と覚えておくとよい．

ここで紹介した公理は，これから展開していく理論（微分積分学）における 1 つの公理であり，これ以外にも幾つかの公理を採用する．しかしながら，それらの公理は諸君にとってごく当り前な事項であるから（むしろ，それらの公理を採用しないと言われるときの方が奇異に感じるであろう）ここでそれらを紹介することはやめよう．

第1章　実数と数列の極限

1.1　実数の連続性

実数とは何か？高校では，実数とは

- 有理数および無理数（循環しない無限小数）の総称
- 数直線上の各点に対応する数

と習ったことであろう．これはこれで間違いないのであるが，厳密な理論を展開しようとすると少々曖昧な定義であることが分かる．そこで，実数を次の3つの公理を満たす集合 $\mathbf{R}$ の元として定義する．

実数の公理

(1) 代数の公理（四則演算）
(2) 順序の公理（大小関係）
(3) 連続性公理

ここで，(1) は和および積に関する基本的な性質を列挙した公理であり，代数学の用語を用いれば「$\mathbf{R}$ は体である」と言うことができる．(2) は不等号に関する基本的な性質を列挙した公理である．これら2つの公理の詳細は付録 A.1 において紹介する．

さて，有理数全体の集合 $\mathbf{Q}$ もまた代数の公理と順序の公理を満たすのであるが，$\mathbf{Q}$ と $\mathbf{R}$ が決定的に異なるのは，$\mathbf{R}$ が連続性公理を満たすのに対して，$\mathbf{Q}$ は満たさないことである．この連続性公理は，直感的には実数は数直線上に隙間なく分布していることを表しており，解析学では非常に重要な役割を担っている．この公理を述べるために，幾つかの言葉を定義しよう．以下では，集合 $\mathbf{R}$ は代数の公理と順序の公理を満たしているとする．

定義 1.1　A を空でない $\mathbf{R}$ の部分集合とし，$b \in \mathbf{R}$ とする．

(1) 任意の $a \in A$ に対して $a \leq b$ が成り立つとき，b を A の**上界**という．
(2) 任意の $a \in A$ に対して $b \leq a$ が成り立つとき，b を A の**下界**という．
(3) A の上界が存在するとき，A は**上に有界**という．
(4) A の下界が存在するとき，A は**下に有界**という．
(5) A が上に有界かつ下に有界であるとき，A は**有界**という．

例 1.1　$A = (0, 1]$ の場合，0 以下のすべての実数は $(0, 1]$ の下界であり，1 以上のすべての実数は $(0, 1]$ の上界である．ゆえに，$(0, 1]$ は下に有界かつ上に有界であり，それゆえ $(0, 1]$ は有界である．

例 1.2　$A = \mathbf{N}$ の場合，1 以下のすべての実数は $\mathbf{N}$ の下界であり，$\mathbf{N}$ は下に有界である．また，$\mathbf{N}$ が上に有界でないことは，直感的には明らかであるが，後で述べる連続性公理から厳密に証明することができる（定理 1.2 の証明を参照せよ）．

定義 1.2 A を空でない $\mathbf{R}$ の部分集合とし，$\alpha \in \mathbf{R}$ とする．

(1) α は A の上界でありかつ A に属すとき，α を A の**最大元**と呼び $\alpha = \max A$ と書く．
(2) α は A の下界でありかつ A に属すとき，α を A の**最小元**と呼び $\alpha = \min A$ と書く．

例 1.3 $A = (0, 1]$ の場合，$\max A = 1$ であり $\min A$ は存在しない．$A = \mathbf{N}$ の場合，$\min A = 1$ であり $\max A$ は存在しない．

この例から分かるように，$\max A$ や $\min A$ は常に存在するとは限らない．

定義 1.3 A を空でない $\mathbf{R}$ の部分集合とする．

(1) A の上界全体の集合に最小元 α が存在するとき，α を A の**上限**といい $\alpha = \sup A$ と書く．
(2) A の下界全体の集合に最大元 α が存在するとき，α を A の**下限**といい $\alpha = \inf A$ と書く．
(3) A が上に有界でないとき，$\sup A = +\infty$ と書く．
(4) A が下に有界でないとき，$\inf A = -\infty$ と書く．

例 1.4 $A = (0, 1]$ の場合，A の上界全体の集合 $= [1, \infty)$ および A の下界全体の集合 $= (-\infty, 0]$ であるから，$\sup(0, 1] = 1$ および $\inf(0, 1] = 0$．$A = \mathbf{N}$ の場合，A は上に有界でなく A の下界全体の集合 $= (-\infty, 1]$ であるから，$\sup \mathbf{N} = +\infty$ および $\inf \mathbf{N} = 1$．

以上の準備の下，実数の連続性公理を述べよう．

連続性公理 A を空でない $\mathbf{R}$ の部分集合とする．A が上に有界ならば，A の上限 $\sup A$ が（$\mathbf{R}$ において）必ず存在する．

ここでは上限を用いて連続性公理を述べたが，上限の代わりに下限を用いて,「A が下に有界ならば，A の下限 $\inf A$ が（$\mathbf{R}$ において）必ず存在する」という命題を連続性公理に採用してもよい．すなわち，これら2つの命題は同値である（その真偽が一致する）ことが示される．

この連続性公理より，$\pm\infty$ を値として許容するならば，任意の空でない $\mathbf{R}$ の部分集合 A に対して，$\sup A$ および $\inf A$ は必ず存在することが分かる．

問 1.1 以下の $\mathbf{R}$ の部分集合 A に対して，$\sup A, \inf A, \max A, \min A$ をそれぞれ求めよ．

(1) $A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x > 0, x^2 \leq 2\}$
(2) $A = \{(-1)^n \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbf{N}\}$
(3) $A = \{\tan\bigl(\frac{1-3n}{6n}\pi\bigr) \mid n \in \mathbf{N}\}$

問 1.2 空でない $\mathbf{R}$ の部分集合 A に対して，最大元 $\max A$ が存在するならば $\sup A = \max A$ が成り立ち，最小元 $\min A$ が存在するならば $\inf A = \min A$ が成り立つことを証明せよ．

定理 1.1 A を空でない $\mathbf{R}$ の部分集合とし，$\alpha \in \mathbf{R}$ とする．

(1) $\alpha = \sup A$ となるための必要十分条件は次の2条件が成り立つことである．
  (i) 任意の $a \in A$ に対して $a \leq \alpha$
  (ii) $\beta < \alpha$ を満たす任意の $\beta \in \mathbf{R}$ に対して $\beta < a$ となる $a \in A$ が存在する

(2) $\alpha = \inf A$ となるための必要十分条件は次の 2 条件が成り立つことである．
(i) 任意の $a \in A$ に対して $\alpha \leq a$
(ii) $\alpha < \beta$ を満たす任意の $\beta \in \mathbf{R}$ に対して $a < \beta$ となる $a \in A$ が存在する

証明 (1) を示そう．(i) は α が A の上界であるという条件である．また,「$\beta < a$ となる $a \in A$ が存在する」という条件は β が A の上界ではないということであるから（公理 0.1 を参照せよ），(ii) は α より小さな実数は決して A の上界にはならないという条件である．したがって，これら 2 条件は α が A の最小の上界であることを述べており，$\alpha = \sup A$ となるための必要十分条件となる．(2) も全く同様な考察によって示される．(証明終)

この定理 1.1 の (1) および (2) における条件 (ii) は，それぞれ
(1) (ii$'$) 任意の正数 ε に対して $\alpha - \varepsilon < a$ となる $a \in A$ が存在する
(2) (ii$'$) 任意の正数 ε に対して $a < \alpha + \varepsilon$ となる $a \in A$ が存在する
と同値であることに注意しよう．定理 1.1 はこの (ii$'$) の形で使われる場合もある．

問 1.3 A, B を空でない $\mathbf{R}$ の有界な部分集合で $A \subset B$ を満たすとする．このとき，$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$ が成り立つことを示せ．

定理 1.2（Archimedes（アルキメデス）の公理） 任意の正数 a, b に対して，$a < nb$ となる自然数 n が存在する．

証明 まず，$b = 1$ の場合を示す．このとき，定理の主張を論理記号を用いて書くと次のようになる．

$$\forall a > 0\ \exists n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } a < n \tag{1.1}$$

この命題が偽であると仮定してみよう．このとき，この (1.1) の否定命題が成り立つのであるが，公理 0.1 を用いてその否定命題を変形すると，次のようになる．

$$\begin{aligned} \neg(\forall a > 0\ \exists n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } a < n) &\equiv \exists a > 0\ \neg(\exists n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } a < n) \\ &\equiv \exists a > 0\ \forall n \in \mathbf{N}\ \neg(a < n) \\ &\equiv \exists a > 0\ \forall n \in \mathbf{N}\ n \leq a \end{aligned}$$

この最後の命題は $\mathbf{N}$ の上界であるような正数 a が存在すると言っており，それゆえ $\mathbf{N}$ が上に有界であることが従う．このとき，連続性公理より $\mathbf{N}$ の上限 $\alpha = \sup \mathbf{N} \in \mathbf{R}$ が存在する．$\alpha - 1 < \alpha$ であるから定理 1.1 (1) より（$A = \mathbf{N}$ および $\beta = \alpha - 1$ として (ii) を用いる）$\alpha - 1 < n$ となる $n \in \mathbf{N}$ が存在する．このとき，$\alpha < n + 1 \in \mathbf{N}$ が従うが，これは α が $\mathbf{N}$ の上限である（したがって上界でもある）ことに矛盾する．それゆえ (1.1) が成り立たなくてはならず，$b = 1$ のときの定理の主張が示された．

次に，一般の $b > 0$ の場合を示す．任意の正数 a, b に対して，ab^{-1} もまた正数であるから，前半において証明したことから $ab^{-1} < n$ となる自然数 n が存在する．この最後の不等式の両辺に $b > 0$ を掛ければ $a < nb$ となり，定理の主張が従う．(証明終)

この証明から分かるように，自然数全体の集合 $\mathbf{N}$ が上に有界でないことが，直感に頼らず，実数の公理から論理的に厳密に証明される．

ここでは，実数の連続性公理を上限を用いて述べたが，それ以外にも（この連続性公理と同値な）連続性公理が知られている．興味ある人は付録 A.1 を参照して頂きたい．

1.2　数列の極限

高校では，数列 $\{a_n\}$ が定数 α に収束するとは

- n が限りなく大きくなるにつれて，a_n が α に限りなく近づくときをいう

と習い，その定義に引き続いて幾つかの例を眺めることにより，数列の収束の意味を理解したことであろう．しかし，ここで今一歩踏み込んでみて「n が限りなく大きく」とか「a_n が α に限りなく近づく」という意味を考えてみると，雰囲気は伝わってくるものの幾分漠然としており，厳密な理論を展開していく上では不十分であることが分かる．そこで，数列の収束の厳密な定義を与えよう．なお，本書では特に断らない限り数列はすべて実数列であるとする．

定義 1.4　数列 $\{a_n\}$ が定数 α に**収束する**とは，任意の正数 ε に対してある自然数 n_0 が存在し，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つときをいう．このとき，α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**といい

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{あるいは} \quad a_n \to \alpha \ (n \to \infty)$$

と書く．

この数列の収束の定義を論理記号を用いて書くと次のようになる．

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}\ (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon)$$

このような定義をいきなり出されてもピンとこないであろうから，その意味を説明しておこう．これは，どんなに小さな正数 ε を取ってきても，それに応じて十分大きな自然数 n_0 を取れば，第 n_0 項目以降のすべての a_n は α から（距離 ε という）極めて近い所にいる，ということを述べている．この番号 n_0 は一般に ε に依存しており，ε を小さくすると，それに応じて n_0 は大きく取らなければならない．$n_0 = n_0(\varepsilon)$ と書いておくと分かりやすいであろう．

ここでは記号 ε を用いて数列の収束を定義したが，その定義に従って（それゆえ，記号 ε を用いて）数列の収束を議論する論法は「ε 論法」あるいは「ε-N 論法」等と呼ばれている．

例 1.5　直感的には自明な極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ は，Archimedes の公理（定理 1.2）より論理的に厳密に導くことができる．実際，任意の $\varepsilon > 0$ に対して（$a = 1, b = \varepsilon$ として）定理 1.2 を用いると $1 < n_0\varepsilon$ を満たす自然数 n_0 が存在することが分かる．このとき，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n に対して，$1 < n_0\varepsilon \leq n\varepsilon$ が成り立つので，この両辺を n で割ると $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$，それゆえ $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ が成り立つ．以上のことをまとめると，

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}\ \left(n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon\right)$$

が成り立つことが示された．したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ が成り立つ．

こんな当たり前なことを何故難しい論理記号を用いて証明するのか？という疑問をもつ人も多いであろう．しかし，このような ε-N 論法を用いないと証明するのが非常に困難になるような問題も多数ある．そのような問題の 1 例としてよく引き合いに出されるのが次の例である．

例 1.6　$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば次式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

これは，数列 $\{a_n\}$ の第 1 項から第 n 項までの算術平均値を一般項とする数列が $\{a_n\}$ の極限値に収束することを述べている．直感的には，n を大きくするにつれて，平均をとる集合 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ の多くの元が α に近づくので，その平均値も α に近づいてくるのである．高校までの知識でこれ以上の証明を与えるのは困難であろう．しかしながら，ε-N 論法を使うと以下のようにしっかりとした証明を与えることができる．

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，仮定よりある自然数 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ が存在して，

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon \quad (\forall n \geq n_0) \tag{1.2}$$

が成り立つ．次に，この番号 n_0 を用いて

$$M := |a_1 - \alpha| + |a_2 - \alpha| + \cdots + |a_{n_0 - 1} - \alpha|$$

とおこう．(この M もまた一般には ε に依存していることに注意しよう.) このとき，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$\begin{aligned}
\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \alpha \right| &= \left| \frac{(a_1 - \alpha) + (a_2 - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n} \right| \\
&\leq \frac{|a_1 - \alpha| + \cdots + |a_{n_0 - 1} - \alpha|}{n} + \frac{|a_{n_0} - \alpha| + \cdots + |a_n - \alpha|}{n} \\
&< \frac{M}{n} + \frac{(n - (n_0 - 1))\varepsilon}{n} \leq \frac{M}{n} + \varepsilon
\end{aligned}$$

となる．ここで，Archimedes の公理（定理 1.2）より $M < n_1 \varepsilon$ を満たす自然数 n_1 が存在する．このとき，$n \geq n_1$ を満たす任意の自然数 n に対して $\frac{M}{n} \leq \frac{M}{n_1} < \varepsilon$ が成り立つ．そこで，$n_2 = n_2(\varepsilon)$ を $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$ により定めると，$n \geq n_2$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \alpha \right| < \frac{M}{n} + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

となるが，これは望みの式が成り立つことを示している．(証明終)

この最後の不等式の右辺が ε ではなく 2ε であることに疑問を持つ人もいるかもしれない．この点については，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ε の代わりに $\frac{\varepsilon}{2}$ から上のようにして定まる自然数 n_2 を n_3 とおくと（すなわち，$n_3(\varepsilon) := n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ とすると）$n \geq n_3$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \alpha \right| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立つことが分かる．あるいは，(1.2) の代わりに $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(\forall n \geq n_0)$ を満たす自然数 n_0 を取ることから議論を始めれば，最後に ε の置き換えをすることなく，数列の収束の定義における不等式と同じ形の不等式を導くことができる．

上の証明における計算過程を各自手を動かして確かめてみることを強く推奨する．そうすることにより，どの条件がどのように使われているかが明確に理解できることであろう．このように

自分で手を動かして計算や証明を確認することは，この部分だけではなくこれから数学を学んでいく上で重要な作業である．特に，より進んだ内容の教科書では途中計算が省かれている場合が非常に多い．その際，書かれていることを鵜呑みにするのではなく，省かれている計算を自分で補いながら最終的な結論を確認するように心掛けよう．そのことがより深い理解に繋がっていく．このような作業は，しばしば「行間を埋める」あるいは「行間を読む」と表現される．

次に，数列の極限に関する基本事項を紹介しよう．そのために，幾つかの言葉を定義しておく．

定義 1.5　$\{a_n\}$ を数列とする．

(1) 任意の自然数 n に対して $a_n \leq a_{n+1}$（または $a_n < a_{n+1}$）が成り立つとき，$\{a_n\}$ は**単調増加**（または**狭義単調増加**）であるという．
(2) 任意の自然数 n に対して $a_n \geq a_{n+1}$（または $a_n > a_{n+1}$）が成り立つとき，$\{a_n\}$ は**単調減少**（または**狭義単調減少**）であるという．
(3) 集合 $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ が上に有界（または下に有界）であるとき，$\{a_n\}$ は**上に有界**（または**下に有界**）であるという．
(4) 集合 $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ が有界であるとき，$\{a_n\}$ は**有界**であるという．

定理 1.3　収束する数列 $\{a_n\}$ は有界である．

証明　$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とすると，極限の定義より（$\varepsilon = 1$ に対して）十分大きな自然数 n_0 を取れば $|a_n - \alpha| < 1$ $(\forall n \geq n_0)$ が成り立つ．それゆえ，

$$|a_n| = |(a_n - \alpha) + \alpha| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha| \qquad (\forall n \geq n_0)$$

したがって，$M := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |\alpha|\}$ とおくと $|a_n| \leq M$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ が成り立つ．これは $\{a_n\}$ が有界であることを示している．(証明終)

次の定理は高校において既に習っていることであるが，ここで再度紹介しておく．高校では直感的な理解にとどまりその証明は与えられなかったが，数列の極限の定義を厳密に与えた今，その証明を与えることができる．

定理 1.4　$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とすると，

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta \quad \left(= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\right)$
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta \quad \left(= \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n\right)$

さらに，$b_n \neq 0$ $(n \in \mathbf{N})$, $\beta \neq 0$ とすると，

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \left(= \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}\right)$

証明　(2) を示そう．(1) および (3) の証明は問として残しておく．まず，

$$|a_n b_n - \alpha\beta| = |(a_n - \alpha)b_n + \alpha(b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha||b_n| + |\alpha||b_n - \beta|$$

が成り立つことに注意しよう．一方，仮定より任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな自然数 n_0 を取れば，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon \quad \text{および} \quad |b_n - \beta| < \varepsilon \tag{1.3}$$

が成り立つ．また，$\{b_n\}$ は収束列であるから，定理 1.3 より有界列であることが分かる．したがって，十分大きな正数 M を取れば $|b_n| \leq M$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ が成り立つ．それゆえ，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$|a_n b_n - \alpha\beta| < \varepsilon M + |\alpha|\varepsilon = (M + |\alpha|)\varepsilon$$

が成り立つ．ここで $\varepsilon > 0$ は任意であったから，この最後の不等式は望みの式が成り立つことを示している．(証明終)

例 1.6 の時と同様，この最後の不等式の右辺が ε ではなく $(M + |\alpha|)\varepsilon$ であることに疑問を持つ人がいるかもしれない．これについては，ε の代わりに $\frac{\varepsilon}{M+|\alpha|}$ から定まる自然数 n_0 を n_1 とすると（すなわち，$n_1(\varepsilon) := n_0\big(\frac{\varepsilon}{M+|\alpha|}\big)$ とすると）$n \geq n_1$ を満たす任意の自然数 n に対して $|a_n b_n - \alpha\beta| < \varepsilon$ が成り立つことが分かる．あるいは，(1.3) の代わりに

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{M + |\alpha|} \quad \text{および} \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{M + |\alpha|} \quad (\forall n \geq n_0)$$

を満たす自然数 n_0 を取ることから議論を始めれば，最後に ε の置き換えをすることなく $|a_n b_n - \alpha\beta| < \varepsilon$ を導くことができる．

問 1.4 $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば，ある自然数 n_0 が存在して $|b_n| \geq \frac{1}{2}|\beta|$ $(\forall n \geq n_0)$ となることを示せ．

問 1.5 定理 1.4 の (1) および (3) を証明せよ．

1.3 数列の収束判定法

次の「はさみうちの原理」も高校で学んできており，数列の極限値を計算する際に大いに役立つことは承知しているであろう．ここでは，その証明を与えるので「はさみうちの定理」と呼ぼう．

定理 1.5（はさみうちの定理） 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ が $b_n \leq a_n \leq c_n$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ を満たしており，かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ ならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立つ．

証明 仮定より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな自然数 n_0 を取れば，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n に対して $|b_n - \alpha| < \varepsilon$ および $|c_n - \alpha| < \varepsilon$，すなわち，

$$\alpha - \varepsilon < b_n < \alpha + \varepsilon \quad \text{および} \quad \alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon$$

が成り立つ．これらの不等式と仮定より，

$$\alpha - \varepsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < \alpha + \varepsilon \qquad \therefore \quad \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$$

したがって，$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ $(\forall n \geq n_0)$ となり $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が従う．(証明終)

同様な考察から，次の定理を証明することができる．その証明は問として残しておこう．

定理 1.6　数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が $a_n \leq b_n$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ を満たしており，かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば，$\alpha \leq \beta$ が成り立つ．

問 1.6　定理1.6を証明せよ．

定理 1.7　上（または下）に有界な単調増加（または減少）数列は収束列である．

証明　$\{a_n\}$ を上に有界な単調増加数列とする．集合 $\{a_1, a_2, \ldots\}$ は上に有界であるから，連続性公理より上限 $\alpha = \sup\{a_1, a_2, \ldots\}$ が存在する．このとき，

$$a_n \leq \alpha \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

が成り立つ．さて，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\alpha - \varepsilon < \alpha$ であるから，定理1.1 (1) より $\alpha - \varepsilon < a_{n_0}$ を満たす自然数 n_0 が存在する．このとき，$\{a_n\}$ が単調増加数列であることから

$$\alpha - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \quad (\forall n \geq n_0)$$

が成り立つ．これら2つの不等式より $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ $(\forall n \geq n_0)$ が得られ，数列 $\{a_n\}$ は α に収束することが分かる．全く同様にして，下に有界な単調減少数列も収束することが示される．(証明終)

例 1.7　$0 \leq r < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$．

実際，$0 \leq r < 1$ ならば $0 \leq r^{n+1} \leq r^n$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ であるから，$\{r^n\}$ は下に有界な単調減少数列である．したがって，定理1.7より極限値 $\alpha = \lim_{n\to\infty} r^n$ が存在する．$r^{n+1} = rr^n$ において $n \to \infty$ とすれば，$\alpha = r\alpha$．ゆえに $(1-r)\alpha = 0$ となるが，$r \neq 1$ より $\alpha = 0$ となり望みの式が従う．

あるいは，次のように証明してもよい．$r = 0$ のときは明らかだから，$0 < r < 1$ とする．このとき，$r^{-1} > 1$ であるから $r^{-1} = 1 + h$ を満たす $h > 0$ が取れる．二項定理より

$$r^{-n} = (1+h)^n = 1 + nh + \cdots + h^n > nh$$

となるが，この両辺の逆数をとれば $0 < r^n < \frac{1}{hn}$ となり，はさみうちの定理より望みの式が従う．

問 1.7　$a_1 = 1$ および $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ に対して次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加列であることを示せ．
(2)　数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

例 1.8　$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ より定まる数列 $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加列，それゆえ収束列であることを見ていこう．二項定理より，

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{0}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

ここで，$1 \leq k \leq n$ を満たす任意の自然数 k に対して

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{0}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\&\quad\leq\left(1-\frac{0}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

が成り立つことに注意すれば，$a_n \leq a_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ が従い，$\{a_n\}$ は単調増加であることが分かる．また，$(k+1)! \geq 2^k$ $(\forall k \in \mathbf{N})$ より，

$$a_n \leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}\leq 2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3 \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

となり $\{a_n\}$ は上に有界である．したがって $\{a_n\}$ は収束する．その極限値を

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

と書くことは既に高校で習ってきた．この実数 e は **Napier（ネピア）数**と呼ばれ，解析学において重要な役割を果たす数である．

高校では具体的にその極限値が計算できるような数列のみを扱い，その極限値を求めることによってその数列が収束することを確かめていた．ところが上の例からも分かるように，（仮にその極限が存在することが分かっていても）その極限値が具体的に計算できない数列は沢山存在する．そのような数列の極限が存在することの 1 つの十分条件を与えているのが定理 1.7 であるが，より一般の数列に対する収束判定法を紹介しよう．

定義 1.6　数列 $\{a_n\}$ が **Cauchy（コーシー）列**であるとは，$n, m \to \infty$ のとき $|a_n - a_m| \to 0$ が成り立つときをいう．より正確には，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 n_0 が存在し，$n, m \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n, m に対して $|a_n - a_m| < \varepsilon$ が成り立つときをいう．

この Cauchy 列の定義を論理記号を用いて書くと次のようになる．

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n, m \in \mathbf{N}\ (n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$$

定理 1.8　数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることである．

証明　（必要条件）$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とすると，

$$|a_n - a_m| = |(a_n-\alpha)-(a_m-\alpha)| \leq |a_n-\alpha|+|a_m-\alpha| \to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

であるから，$\{a_n\}$ は Cauchy 列である．

（十分条件）$\{a_n\}$ を Cauchy 列とすると，定理 1.3 の証明と全く同様な推論により，$\{a_n\}$ が有界であることが分かる．特に，各自然数 n を固定するごとに集合 $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ もまた有界であるから，連続性公理よりその上限および下限が存在する．それらを

$$r_n := \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} \quad \text{および} \quad l_n := \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$$

と書こう．このとき，$l_n \leq l_{n+1} \leq r_{n+1} \leq r_n$ ($\forall n \in \mathbf{N}$) が成り立つから（問 1.3 を参照せよ），$\{r_n\}$ は下に有界な単調減少数列であり，$\{l_n\}$ は上に有界な単調増加数列である．したがって，定理 1.7 よりそれらは収束列である．

一方，仮定より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな自然数 n_0 を取れば $a_n - a_m < \varepsilon$ ($\forall n, m \geq n_0$) が成り立つ．特に，任意の $m \geq n_0$ に対して $a_n < a_m + \varepsilon$ ($\forall n \geq n_0$) が成り立つ．これは $a_m + \varepsilon$ が集合 $\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots\}$ の上界であることを示しているから，

$$r_{n_0} = \sup\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots\} \leq a_m + \varepsilon \qquad \therefore \quad r_{n_0} - \varepsilon \leq a_m \ (\forall m \geq n_0)$$

が成り立つ．これは $r_{n_0} - \varepsilon$ が集合 $\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots\}$ の下界であることを示しているから，

$$r_{n_0} - \varepsilon \leq \inf\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots\} = l_{n_0}$$

となる．さらに $\{r_n\}, \{l_n\}$ の単調性を用いると，

$$0 \leq r_n - l_n \leq r_{n_0} - l_{n_0} \leq \varepsilon \quad (\forall n \geq n_0)$$

となるが，これは $\lim_{n\to\infty} (r_n - l_n) = 0$ が成り立つことを示しており，$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} l_n$ が得られる．数列 $\{r_n\}, \{l_n\}$ の定義より $l_n \leq a_n \leq r_n$ ($\forall n \in \mathbf{N}$) が成り立っているので，はさみうちの定理より $\{a_n\}$ は収束列であり，その極限値は $\{r_n\}, \{l_n\}$ の極限値と一致することが分かる．(証明終)

例 1.9　数列 $\{a_n\}$ は次の性質をもつとする.「$0 \leq \theta < 1$ を満たす n に無関係なある定数 θ が存在し，すべての自然数 n に対して

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \theta |a_{n+1} - a_n|$$

が成り立つ.」このとき，$\{a_n\}$ は Cauchy 列であり，それゆえ定理 1.8 より収束列である．

実際，上の条件式を帰納的に用いれば

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \theta |a_n - a_{n-1}| \leq \theta^2 |a_{n-1} - a_{n-2}| \leq \cdots \leq \theta^{n-1} |a_2 - a_1|$$

となる．したがって，任意の自然数 n, m に対して

$$\begin{aligned} |a_n - a_{n+m}| &= |(a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{n+m-1} - a_{n+m})| \\ &\leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m-1} - a_{n+m}| \\ &\leq (\theta^{n-1} + \theta^n + \cdots + \theta^{n+m-2}) |a_2 - a_1| \\ &= \frac{\theta^{n-1}(1 - \theta^m)}{1 - \theta} |a_2 - a_1| \leq \frac{\theta^{n-1}}{1 - \theta} |a_2 - a_1| \to 0 \qquad (n \to \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ．これより，$\{a_n\}$ が Cauchy 列になることは明らかであろう．この例は，直感的には数列 $\{a_n\}$ の隣り合う項の間隔が一定の比率 θ 以下で狭くなっていると，いつかは何処かに収束してしまうと言っているのである．

問 1.8　$a_1 = 1$ および $a_{n+1} = (a_n + 1)^{-1}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ に対して次の問いに答えよ．

(1)　$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \theta |a_{n+1} - a_n|$　($\forall n \in \mathbf{N}$) となる $\theta \in [0, 1)$ が存在することを示せ．
(2)　数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

ここで，十分条件として比較的強い仮定を課しているが，割と使いやすい定理を紹介しよう．

定理 1.9　各項が 0 でない数列 $\{a_n\}$ が条件 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ を満たすならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる．

証明　$r := \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ とおき，$r < r_1 < 1$ を満たす r_1 を任意に 1 つ取り固定する．（例えば，$r_1 := \frac{1}{2}(1+r)$ とすればよい．）このとき，極限の定義より $\varepsilon = r_1 - r > 0$ に対して十分大きな自然数 n_0 を取れば，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - r\right| < r_1 - r$$

が成り立つ．このとき，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - r\right) + r\right| \leq \left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - r\right| + r < (r_1 - r) + r = r_1 \qquad (\forall n \geq n_0)$$

となる．したがって，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$|a_n| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}a_{n_0}\right| \leq r_1^{n-n_0}|a_{n_0}| \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が従う．（証明終）

例 1.10　任意の実数 r に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n!} = 0$ が成り立つ．

実際，$r = 0$ の場合は明らかである．$r \neq 0$ のとき，$a_n = \frac{r^n}{n!}$ とおくと

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|r|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|r|^n} = \frac{|r|}{n+1} \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

したがって，定理 1.9 より望みの式が従う．

例 1.11　$|r| > 1$ を満たす任意の実数 r および p に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{r^n} = 0$ が成り立つ．

実際，$a_n = \frac{n^p}{r^n}$ とおくと

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^p}{|r|^{n+1}}\frac{|r|^n}{n^p} = \frac{1}{|r|}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \to \frac{1}{|r|} \qquad (n\to\infty)$$

ここで $\frac{1}{|r|} < 1$ であるから，定理 1.9 より望みの式が従う．

数列の発散についても少し触れておこう．

定義 1.7　(1)　数列 $\{a_n\}$ が $+\infty$ に**発散する**とは，任意の正数 $M > 0$ に対して十分大きな自然数 n_0 を取ると，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n に対して $a_n > M$ が成り立つときをいう．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ と書く．

(2)　数列 $\{a_n\}$ が $-\infty$ に**発散する**とは，任意の正数 $M > 0$ に対して十分大きな自然数 n_0 を取ると，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n に対して $a_n < -M$ が成り立つときをいう．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と書く．

数列 $\{a_n\}$ が $+\infty$ に発散することの定義を論理記号を用いて書くと次のようになる．

$$\forall M > 0 \, \exists n_0 \in \mathbf{N} \, \forall n \in \mathbf{N} \, (n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M)$$

これより直ぐに分かることであるが，数列 $\{a_n\}$ が $+\infty$ に発散すれば

$$\forall M > 0 \, \exists n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } a_n > M \tag{1.4}$$

が成り立つ．しかしながら，その逆は成り立たないことに注意しよう．この後者の命題は「数列 $\{a_n\}$ は上に有界でない」ということを論理記号で書いたものに他ならない．

問 1.9　(1.4) を満たすが $+\infty$ に発散しないような数列 $\{a_n\}$ の例を挙げよ．

例 1.12　任意の $r > 1$ に対して，$\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$ が成り立つ．

実際，$s = \frac{1}{r}$ とおき例 1.7 を適用すれば容易に導かれる．あるいは，次のように直接的に証明してもよい．$r > 1$ より $r = 1 + h, h > 0$ と書くことができ，二項定理より $r^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$ となる．さて，任意の $M > 0$ に対して，Archimedes の公理（定理 1.2）より $M < n_0 h$ となる自然数 n_0 が存在する．このとき，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n に対して $r^n \geq 1 + nh > n_0 h > M$ が成り立ち，$\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$ が従う．

論理の演習の意味で別証明も与えておこう．$r > 1$ より $\{r^n\}$ は単調増加数列である．ここで仮に $\{r^n\}$ は上に有界であるとしてみよう．このとき，定理 1.7 より極限値 $\alpha = \lim_{n\to\infty} r^n$ が存在する．$1 \leq r^{n+1} = rr^n$ において $n \to \infty$ とすれば，$1 \leq \alpha = r\alpha$．特に，$(1-r)\alpha = 0$ となり $r \neq 1$ より $\alpha = 0$ が従うが，これは $1 \leq \alpha$ に矛盾する．したがって $\{r^n\}$ は上に有界でない．ゆえに，任意の $M > 0$ に対して $r^{n_0} > M$ となる自然数 n_0 が存在する．このとき，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n に対して $r^n \geq r^{n_0} > M$ が成り立ち，$\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$ が従う．

問 1.10　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

で定める．このとき，次式が成り立つことを証明せよ．

(1) $|a_{2n} - a_n| \geq \frac{1}{2} \quad (\forall n \in \mathbf{N})$
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

1.4　Bolzano–Weierstrass の定理

必ずしも収束するとは限らない有界な数列に対する Bolzano–Weierstrass（ボルツァーノ・ワイヤストラス）の定理を紹介しておこう．これは以下の章でも使われる重要な定理である．

定義 1.8　自然数に対して定義され自然数に値をもつ関数 $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ が狭義単調増加であるとき，すなわち $\varphi(1) < \varphi(2) < \cdots < \varphi(n) < \varphi(n+1) < \cdots$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ から作られる数列 $\{a_{\varphi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ を $\{a_n\}$ の**部分列**という．

例えば，$\varphi(n) = 2n$ の場合には偶数項からなる部分列 $a_2, a_4, a_6, \ldots$ になり，$\varphi(n) = 2n-1$ の場合には奇数項からなる部分列 $a_1, a_3, a_5, \ldots$ になる．いずれにしても，φ の狭義単調増加性より，任意の自然数 n に対して $\varphi(n) \geq n$ が成り立つことに注意しよう．

定理 1.10（Bolzano–Weierstrass）　有界な数列は収束する部分列をもつ．

証明　$\{a_n\}$ を有界な数列とする．このとき，ある $l_1, r_1 \in \mathbf{R}$ が存在して $l_1 \leq a_n \leq r_1$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ が成り立つ．閉区間 I_1 を $I_1 := [l_1, r_1]$ で定める．さて，閉区間 $I_m = [l_m, r_m]$ が

$$\{n \in \mathbf{N} \,|\, a_n \in I_m\} \text{ は無限集合}$$

となるように与えられているとき，閉区間 $I_{m+1} = [l_{m+1}, r_{m+1}]$ を，I_m の 2 等分割により得られる閉区間 $[l_m, (l_m + r_m)/2]$ および $[(l_m + r_m)/2, r_m]$ のどちらか一方で，$\{n \in \mathbf{N} \,|\, a_n \in I_{m+1}\}$ が無限集合になるように選ぶ．このようにして帰納的に閉区間の列 $\{I_m\}$ を構成すると，

$$l_m \leq l_{m+1} \leq r_{m+1} \leq r_m, \quad r_m - l_m = 2^{1-m}(r_1 - l_1) \qquad (\forall m \in \mathbf{N})$$

となることが分かる．ゆえに，$\{r_m\}$ は下に有界な単調減少数列であり，$\{l_m\}$ は上に有界な単調増加数列である．したがって，定理 1.7 よりそれらは収束列である．しかもそれらの極限値は一致することが分かる．

次に，自然数に対して定義され自然数に値をもつ関数 $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ を以下のように帰納的に構成する．$\varphi(1) := 1$ とし，$\varphi(m) \in \mathbf{N}$ が定まっているとき，

$$a_{\varphi(m+1)} \in I_{m+1} \quad \text{かつ} \quad \varphi(m+1) > \varphi(m)$$

となるように $\varphi(m+1) \in \mathbf{N}$ を定める．それが可能なことは，$\{n \in \mathbf{N} \,|\, a_n \in I_{m+1}\}$ が無限集合であることから分かる．このとき $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{\varphi(n)}\}$ は，$a_{\varphi(n)} \in I_n$ より $l_n \leq a_{\varphi(n)} \leq r_n$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ を満たす．$\{l_m\}, \{r_m\}$ は同じ値に収束するので，はさみうちの定理より $\{a_{\varphi(n)}\}$ もまたその値に収束する．(証明終)

例 1.13　$a_n = (-1)^n$ により定まる有界数列 $\{a_n\}$ は収束しないが，その部分列 $\{a_{2n}\}$ および $\{a_{2n-1}\}$ はそれぞれ 1 および -1 に収束する．

Bolzano–Weierstrass の定理における有界性の仮定は本質的であり，この仮定を外すともはやこの定理は成り立たなくなる．実際，$a_n = (-1)^n n$ により定まる数列 $\{a_n\}$ を考えると，これは有界ではなく，どんな部分列を取ってきても収束することはない．しかし，部分列 $\{a_{2n}\}$ および $\{a_{2n-1}\}$ はそれぞれ $+\infty$ および $-\infty$ に発散する．この例のように，非有界な数列は $+\infty$ あるいは $-\infty$ に発散する部分列をもつことが示される．その証明は問として残しておこう．

問 1.11　非有界な数列は $+\infty$ あるいは $-\infty$ に発散する部分列をもつことを示せ．

第2章　連続関数

2.1　関数の極限と連続関数

連続関数とはどのような関数か？高校では

- $y = f(x)$ のグラフが切れ目のないひとつながりの曲線になっているような関数 f のこと
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ がすべての a に対して成り立つ関数 f のこと

と習ったことであろう．前者の説明の方が感覚的には理解しやすいが，これを定義として採用するにはあまりに直感に頼り過ぎていると言えよう．後者の説明の方が直感に頼らないだけ厳密な定義と言えるが，数列の時と同様，極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ の定義が曖昧であった．そこで，この関数の極限の厳密な定義を与えよう．なお，本書では特に断らない限り関数はすべて実数値関数であるとする．

定義 2.1（関数の極限） I を a を含む開区間，f を I で定義された関数とする．(ただし，$f(a)$ は定義されていなくてもよい.)

(1) $x \to a$ のとき $f(x)$ が α に**収束する**とは，任意の正数 ε に対してある正数 δ が存在し，$0 < |x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つときをいう．このとき

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \qquad \text{あるいは} \qquad f(x) \to \alpha \ (x \to a)$$

と書き，α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限値**という.

(2) $x \to a + 0$ のとき $f(x)$ が α_+ に**収束する**とは，任意の正数 ε に対してある正数 δ が存在し，$a < x < a + \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して $|f(x) - \alpha_+| < \varepsilon$ が成り立つときをいう．このとき

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha_+ \qquad \text{あるいは} \qquad f(x) \to \alpha_+ \ (x \to a + 0)$$

と書き，α_+ を $x \to a + 0$ のときの $f(x)$ の**右極限値**という.

(3) $x \to a - 0$ のとき $f(x)$ が α_- に**収束する**とは，任意の正数 ε に対してある正数 δ が存在し，$a - \delta < x < a$ を満たす任意の $x \in I$ に対して $|f(x) - \alpha_-| < \varepsilon$ が成り立つときをいう．このとき

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha_- \qquad \text{あるいは} \qquad f(x) \to \alpha_- \ (x \to a - 0)$$

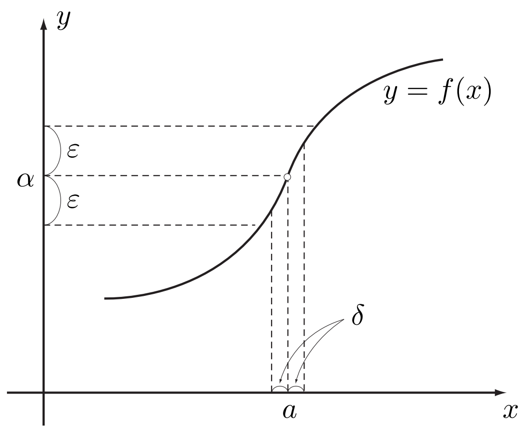
と書き，α_- を $x \to a - 0$ のときの $f(x)$ の**左極限値**という.

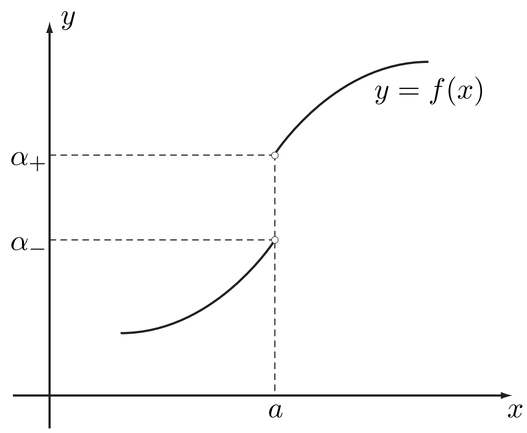
$x \to a$ のとき $f(x)$ が α に収束することの定義を論理記号を用いて書くと次のようになる．

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I \ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon)$$

この定義の意味を説明しておこう．これは，どんなに小さな正数 ε を取ってきても，それに応じて十分小さな正数 δ を取れば，a から距離 δ という極めて近くにある（a と異なる）どんな x をもってきても（すなわち，x が限りなく a に近づくとき），$f(x)$ の値は α から距離 ε という極めて近いところにある（すなわち，$f(x)$ の値は α に限りなく近づく），ということを述べている．この正数 δ は一般に ε に依存しており，ε を小さくすると，それに応じて δ は小さく取らなければならない．そのような意味で δ は ε の関数であり，$\delta = \delta(\varepsilon)$ と書いておくと間違いが減るかもしれない．右および左極限値の定義も論理記号を用いて書き下せるが，それは問として残しておこう．

上の定義では記号 ε および δ を用いているが，その定義に従って（それゆえ，記号 ε および δ を用いて）関数の極限を議論する論法は「ε-δ 論法」と呼ばれている．論理に慣れていない人にとって，この ε-δ 論法はハードルが高く理解に苦しむかもしれない．そんなこともあり，最近では ε-δ 論法を大学2年次以降に教えたほうがいいという意見もあるし，そうしている大学もある．しかしながら，外国語を習得するのに時間をかけているように，ε-δ 論法も大学1年次から少しずつ慣れ親しんで，直ぐには理解できなくとも時間をかけてしっかり学習すればよい．





問 2.1　$x \to a \pm 0$ のとき $f(x)$ が $\alpha_{\pm}$ に収束することの定義を論理記号を用いて書き下せ．

ここで $x \to \pm\infty$ のときの $f(x)$ の極限値の定義も与えておこう．

定義 2.2（関数の極限）

(1)　f を開区間 $I = (a, \infty)$ で定義された関数とする．$x \to +\infty$ のとき $f(x)$ が α に**収束する**とは，任意の正数 ε に対してある（十分大きな）正数 M が存在し，$x > M$ を満たす任意の $x \in I$ に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つときをいう．このとき，次のように書く．

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha \qquad \text{あるいは} \qquad f(x) \to \alpha\ (x \to +\infty)$$

(2)　f を開区間 $I = (-\infty, a)$ で定義された関数とする．$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ が α に**収束する**とは，任意の正数 ε に対してある（十分大きな）正数 M が存在し，$x < -M$ を満たす任意の $x \in I$ に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つときをいう．このとき，次のように書く．

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha \qquad \text{あるいは} \qquad f(x) \to \alpha\ (x \to -\infty)$$

問 2.2 $x \to \pm\infty$ のとき $f(x)$ が α に収束することの定義を論理記号を用いて書き下せ.

次の定理は，数列の極限に関する基本性質を述べている定理 1.4 を関数の極限の場合に焼き直したものであり，定理 1.4 の証明とほぼ同様な方針で証明することができる．その証明は問として残しておこう.

定理 2.1 $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \lim_{x\to a} g(x) = \beta$ とすると，

(1) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \alpha+\beta \quad \left(= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\right)$

(2) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta \quad \left(= \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)\right)$

さらに，$g(x) \neq 0, \beta \neq 0$ とすると，

(3) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta} \quad \left(= \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\right)$

上の定理において極限 $x \to a$ を $x \to a \pm 0$ あるいは $x \to \pm\infty$ に変えてもよい.

問 2.3 $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ ならば，ある正数 δ が存在して $0 < |x-a| < \delta$ を満たす任意の実数 x に対して $\frac{1}{2}|\alpha| \leq |f(x)| \leq |\alpha|+1$ となることを示せ.

問 2.4 定理 2.1 を証明せよ.

いったん関数の極限が定義されれば，高校で習ったときと同様にして関数の連続性の定義を以下のように与えることができる.

定義 2.3 I を区間，$a \in I$ および f を I で定義された関数とする.

(1) f が a で**連続**であるとは，$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つときをいう.

(2) f が I で**連続**であるとは，f が I の各点 a で連続であるときをいう.

(3) I で連続な関数全体の集合を $\boldsymbol{C(I)}$ あるいは $\boldsymbol{C^0(I)}$ と書く.

f が I で連続であることの定義を論理記号を用いて書くと次のようになる.

$$\forall a \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon)$$

この場合，δ は一般に ε だけではなく a にも依存することに注意しよう.

例 2.1 $f(x) = x^2$ で定まる関数 f が $\mathbf{R}$ で連続であることの ε-δ 論法による直接的な証明を与えてみよう．それにより ε と δ の働きを理解して頂きたい.

さて，任意の $a \in \mathbf{R}$ および任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |x^2-a^2| < \varepsilon \tag{2.1}$$

が成り立つような $\delta > 0$ が取れることを示せばよい．そこで，x を $|x-a| < \delta$ を満たす任意の実数としよう．このとき

$$\begin{aligned} |x^2-a^2| &= |x-a||x+a| = |x-a||(x-a)+2a| \\ &\leq |x-a|(|x-a|+2|a|) < \delta(\delta+2|a|) \end{aligned}$$

したがって，$\delta := \sqrt{a^2+\varepsilon} - |a|$ （これは $\delta(\delta+2|a|) = \varepsilon$ の解）とおくと $\delta > 0$ でありかつ (2.1) が成り立つ．あるいは $\delta := \min\{1, \frac{\varepsilon}{2|a|+1}\} > 0$ とおくと，$\delta(\delta+2|a|) < \delta(1+2|a|) < \varepsilon$ よりやはり (2.1) が成り立つ．

この例から分かるように，関数 f の a における連続性を証明するためには，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つような $\delta > 0$ を 1 つ見つけ出せばよい．δ の選び方は無数にあり，一番計算しやすいものを選ぶのがコツである．

与えられた関数が連続であるかどうかを調べるために，上の例のようにいちいち連続の定義に戻って確かめるのは非常に面倒である．そこで実際は，連続であることが既に知られている関数から出発して以下で紹介する定理等を用いて確認をする．次の定理は，連続性の定義および定理 2.1 から直ちに従う．

定理 2.2　I を区間，$a \in I$ および f, g を I で定義された関数とする．f, g が a で連続ならば，$f+g$ および fg もまた a で連続である．さらに，$g(a) \neq 0$ ならば f/g もまた a で連続である．

定義 2.4　f を区間 I で定義された関数，g を区間 J で定義された関数とする．$f(I) := \{f(x) \,|\, x \in I\} \subset J$ が成り立つとき，f と g は**合成可能**であるという．このとき，$h(x) := g(f(x)), x \in I$ で定まる関数 h を f と g の**合成関数**といい，$h = g \circ f$ と書く．

定理 2.3　f と g は合成可能であるとする．f が a で連続であり，かつ g が $f(a)$ で連続であれば，合成関数 $g \circ f$ もまた a で連続である．

証明　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，g が $f(a)$ で連続であることから，ある $\delta_1 > 0$ が存在して

$$|y - f(a)| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$$

が成り立つ．次に，この $\delta_1 > 0$ に対して，f が a で連続であることから，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta_1$$

となる．したがって，$y = f(x)$ として前者の性質を用いることにより

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$$

が従うが，これは $g \circ f$ が a で連続であることを示している．(証明終)

問 2.5　I を区間，$a \in I$ とし，f を区間 I で定義された関数で a において連続であるとする．さらに，$\{x_n\}$ を区間 I における数列で $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ を満たすとする．このとき，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ が成り立つことを，定義に従って厳密に証明せよ．

問 2.6　I を区間，$a \in I$ とし，f を区間 I で定義された関数で a において連続でありかつ $f(a) > 0$ を満たすとする．このとき，ある正数 δ が存在し $|x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して $f(x) > 0$ となることを，連続性の定義を用いて厳密に証明せよ．

2.2 最大値・最小値の存在と中間値の定理

この節では連続関数の重要な性質である最大値・最小値の存在と中間値の定理を紹介しよう．これらの性質は既に高校で習ってきたことであるが，ここではそれらの証明を与える．どちらも関数のグラフを描いてみれば極めて当り前な性質であるが，それだけにその証明には実数の連続性を本質的に用いる．

定義 2.5 I を実数の集合とし，f を I で定義された関数とする．

(1) 実数の集合 $f(I) := \{f(x) \,|\, x \in I\}$ が有界であるとき，すなわち $|f(x)| \leq M$ $(\forall x \in I)$ を満たす定数 $M > 0$ が存在するとき関数 f は**有界**であるという．同様に，$f(I)$ が上（または下）に有界であるとき関数 f は**上**（または**下**）**に有界**であるという．

(2) 実数の集合 $f(I)$ が最大元 $\alpha = \max f(I)$ をもつとき，すなわち $f(x) \leq f(x_0) = \alpha$ $(\forall x \in I)$ を満たす $x_0 \in I$ が存在するとき関数 f は**最大値** α をとるという．

(3) 実数の集合 $f(I)$ が最小元 $\alpha = \min f(I)$ をもつとき，すなわち $f(x) \geq f(x_0) = \alpha$ $(\forall x \in I)$ を満たす $x_0 \in I$ が存在するとき関数 f は**最小値** α をとるという．

定理 2.4 閉区間 $I = [a, b]$ で定義された連続関数 f は有界である．

証明 この定理の結論を論理記号を用いて書くと次のようになる．

$$\exists M > 0 \; \forall x \in I \; |f(x)| \leq M \tag{2.2}$$

これを背理法を用いて証明しよう．この命題が偽であると仮定すると，その否定命題

$$\forall M > 0 \; \exists x \in I \text{ s.t. } |f(x)| > M \tag{2.3}$$

が成り立つ．そこで任意の自然数 $n \in \mathbf{N}$ を取ってきたとき，$M = n$ として上の命題 (2.3) を用いると，$|f(x_n)| > n$ を満たす $x_n \in I$ が存在することが分かる．$a \leq x_n \leq b$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ であるから，このようにして定まる数列 $\{x_n\}$ は有界である．したがって，Bolzano–Weierstrass の定理（定理 1.10）より $\{x_n\}$ は収束する部分列 $\{x_{\varphi(n)}\}$ をもつ．その極限値を

$$\lim_{n \to \infty} x_{\varphi(n)} = x_0 \tag{2.4}$$

としよう．$a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$ において $n \to \infty$ とすれば，定理 1.6 より $a \leq x_0 \leq b$，それゆえ $x_0 \in I$ である．仮定より f は I で連続であり，特に x_0 で連続であるから，(2.4) より

$$\lim_{n \to \infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(x_0) \qquad \therefore \quad \lim_{n \to \infty} |f(x_{\varphi(n)})| = |f(x_0)| \tag{2.5}$$

一方，数列 $\{x_n\}$ の作り方から $|f(x_{\varphi(n)})| \geq \varphi(n) \geq n \to +\infty$ $(n \to \infty)$ となり，数列 $\{|f(x_{\varphi(n)})|\}$ は $+\infty$ に発散するが，これは (2.5) に矛盾する．したがって，(2.2) が成り立たなければならない．（証明終）

定理 2.5（最大値・最小値の存在） 閉区間 $I = [a, b]$ で定義された連続関数 f は最大値および最小値をとる．

証明　定理2.4より $f(I) := \{f(x)\,|\,x \in I\}$ は空でない有界集合である．したがって，実数の連続性公理より上限 $\alpha = \sup f(I) \in \mathbf{R}$ が存在する．任意の自然数 $n \in \mathbf{N}$ を取ってきたとき，$\alpha - \frac{1}{n} < \alpha$ であるから上限の特徴づけを与えている定理1.1 (1) より $\alpha - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \alpha$ を満たす $x_n \in I$ が存在する（定理1.1の記号では，$\beta = \alpha - \frac{1}{n}, a = f(x_n)$ である）．特に，このように定めた数列 $\{x_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha \tag{2.6}$$

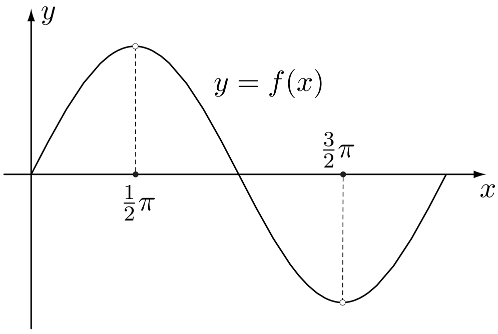
が成り立つ．一方，$a \leq x_n \leq b$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ であるから，数列 $\{x_n\}$ は有界である．したがって，Bolzano–Weierstrassの定理（定理1.10）より $\{x_n\}$ は収束する部分列 $\{x_{\varphi(n)}\}$ をもつ．その極限値を $\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = x_0$ としよう．I が閉区間であることから $x_0 \in I$ である．したがって，(2.6) および f の連続性より

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \alpha \quad \text{および} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(x_0) \qquad \therefore \quad \alpha = f(x_0)$$

となる．α は $f(I)$ の上限であったから特に上界であり，$f(x) \leq \alpha = f(x_0)$ $(\forall x \in I)$ が成り立つ．すなわち，f は x_0 において最大値 α をとる．f が最小値をとることも $\alpha = \inf f(I)$ を考えることにより全く同様にして示される．(証明終)

これら2つの定理はどちらも連続関数に対して成り立つ性質であり，関数の連続性を仮定しないと一般には成り立たない．例えば，定理2.5については，次のように区間 $I = [0, 2\pi]$ で定義された関数 f を考えると，f は最大値も最小値もとらない．

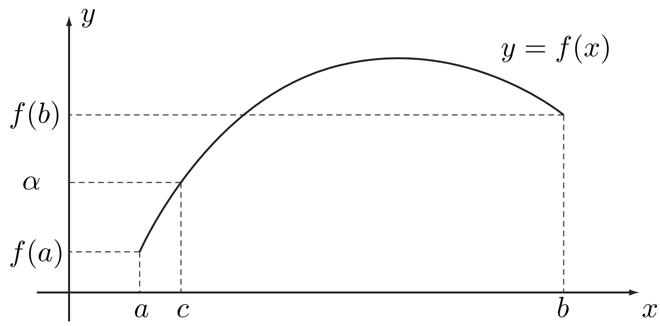
$$f(x) := \begin{cases} \sin x & \left(x \neq \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right) \\ 0 & \left(x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$



もう一点重要なことは，どちらの定理も関数の定義域 I が閉区間であることを仮定している．これが開区間であったりすると，いくら関数 f が連続であっても，有界でなくなったり最大値・最小値が存在しなくなったりする．例えば，$I = (0, 1)$ で定義された関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ を考えてみると明らかであろう．

問 2.7　n を自然数，$a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}$ を実定数とする．このとき，$\mathbf{R}$ で定義された $2n$ 次多項式 $f(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ は最小値をとることを証明せよ．

定理 2.6（中間値の定理）　閉区間 $I = [a, b]$ で定義された連続関数 f が $f(a) \neq f(b)$ を満たしているとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の実数 α に対して $f(c) = \alpha$ となる $c \in (a, b)$ が存在する．



証明　$f(a) < f(b)$ と仮定しよう（$f(a) > f(b)$ の場合も同様に証明できる）．任意の実数 $\alpha \in (f(a), f(b))$ に対して $A := \{x \in I \mid f(x) < \alpha\}$ とおくと，$a \in A$ より A は空集合ではなく，また明らかに有界である．したがって，実数の連続性公理より上限 $c = \sup A$ が存在する．ここで定理 1.1 (1) より，任意の自然数 n に対して $c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$ を満たす $x_n \in A$ が存在する．このようにして定まる数列 $\{x_n\}$ は $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ を満たす．また，$x_n \in A$ より $a \leq x_n \leq b$ および $f(x_n) < \alpha$ であるが，ここで $n \to \infty$ とすれば $a \leq c \leq b$ すなわち $c \in I$ であり，f の連続性より

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \alpha \tag{2.7}$$

となる．$f(b) > \alpha$ より $c \neq b$，それゆえ $c < b$ となる．ここで，任意の自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対して $y_n := c + \frac{b-c}{n}$ とおくと $c < y_n \leq b$ であり，c が A の上限であることに注意すれば

$$f(y_n) \geq \alpha \quad (\forall n \in \mathbf{N}) \qquad \therefore \quad f(c) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \geq \alpha \tag{2.8}$$

となる．(2.7) および (2.8) より $f(c) = \alpha$ であり，特に $c \in (a, b)$ が従う．(証明終)

例 2.2　f を閉区間 $[0, 1]$ で定義された連続関数で $0 \leq f(x) \leq 1$ を満たすものとする．このとき，方程式 $f(x) = x$ は少なくとも 1 つの解をもつことを中間値の定理を用いて証明しよう．

$f(0) = 0$ あるいは $f(1) = 1$ の場合は明らかだから，$f(0) \neq 0$ および $f(1) \neq 1$ と仮定してよい．このとき $f(0) > 0$ および $f(1) < 1$ が成り立つ．そこで $g(x) = f(x) - x$ とおくと，g は閉区間 $[0, 1]$ で定義された連続関数であり $g(0) = f(0) > 0$ および $g(1) = f(1) - 1 < 0$ となる．したがって，中間値の定理より $g(x) = 0$ すなわち $f(x) = x$ を満たす $x \in (0, 1)$ が存在する．

問 2.8　n を自然数，$a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ を実定数とする．このとき，$\mathbf{R}$ で定義された $2n+1$ 次多項式 $f(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1 x + a_0$ に対して，方程式 $f(x) = 0$ は少なくとも 1 つの実解をもつことを証明せよ．

2.3　逆関数と逆三角関数

高校で学んできた連続関数として指数関数および三角関数がある．高校では，これらの関数がうまく定義されしかも連続関数になるということは漠然と学んだだけであって，それらの厳密な定義や連続性の証明は与えられなかった．正数 a および有理数 x に対して a^x が定義できることや，直角三角形の図を用いた三角関数 $\sin x$ の定義は容易に理解されるが，任意の実数 x に対してそれらを定義することはそう簡単ではない．厳密な理論を構築していくためには，それらの関数の定義から見直さなければならないのだが，教育的な面を考慮するとそれは得策とは言えない．そこ

で，Napier 数を底とする指数関数 e^x および三角関数 $\sin x, \cos x$ はすべての実数 x に対して定義されており，高校で習った諸性質が成り立つことを既知として議論を進めることにする．このとき

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \Big(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z}\Big)$$

により三角関数 $\tan x$ を定義すれば，$\tan x$ は各開区間 $\big(\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\big)$ $(n \in \mathbf{Z})$ において連続関数になることが定理 2.2 から従う．

定義 2.6　A, B を集合とする．

(1) A の各元 $a \in A$ に対して B の元 $\varphi(a) \in B$ を対応しているとき，φ を A から B への**写像**といい $\varphi : A \to B$ と書く．このとき，A を写像 φ の**定義域**，B を**値域**という．また，A, B が共に実数の集合であるとき，A から B への写像 φ を**実数値関数**あるいは単に**関数**という．

(2) 写像 $\varphi : A \to B$ が **1 対 1 写像**である，あるいは**単射**であるとは,「$a_1 \neq a_2 \Rightarrow \varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$」すなわち「$\varphi(a_1) = \varphi(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$」を満たすときをいう．

(3) 写像 $\varphi : A \to B$ が**上への写像**である，あるいは**全射**であるとは，任意の $b \in B$ に対して $\varphi(a) = b$ を満たす $a \in A$ が必ず存在するときをいう．

(4) 写像 $\varphi : A \to B$ が**全単射**であるとは，全射かつ単射であるときをいう．

(5) 写像 $\varphi : A \to B$ が全単射であるとき，B の任意の元 $b \in B$ に対して $\varphi(a) = b$ を満たす A の元 $a \in A$ がただ 1 つ定まる．この b から a への対応を $a = \varphi^{-1}(b)$ と書き，$\varphi^{-1} : B \to A$ を φ の**逆写像**という．特に，その写像が関数であるとき，その逆写像を**逆関数**という．

例 2.3　2 次関数 $f(x) = x^2$ を考えよう．

(1) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ としよう．任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して $f(x) \geq 0$ であるから，$y < 0$ に対しては $f(x) = y$ となる $x \in \mathbf{R}$ は存在しない．したがって，$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は全射でない．

(2) $f : \mathbf{R} \to [0, \infty)$ としよう．任意の $y \in [0, \infty)$ に対して $x_1 := \sqrt{y} \in \mathbf{R}$ および $x_2 := -\sqrt{y} \in \mathbf{R}$ とおくと $f(x_1) = f(x_2) = y$ が成り立つ．したがって，$f : \mathbf{R} \to [0, \infty)$ は全射であるが単射ではない．

(3) $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ としよう．任意の $y \in [0, \infty)$ に対して $x := \sqrt{y} \in [0, \infty)$ とおくと $f(x) = y$ であり，また $f(x) = y$ となる $x \in [0, \infty)$ は $x = \sqrt{y}$ に限られる．したがって，$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ は全単射である．なお，f の逆写像が $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ に他ならない．

このように，写像の形だけではなくその値域や定義域の違いにより，その写像が全射であるか単射であるかが変わってくる．

写像 $\varphi : A \to B$ が逆写像 $\varphi^{-1} : B \to A$ をもつとき，次式が成り立つことに注意しよう．

$$\varphi^{-1}(\varphi(a)) = a \quad (\forall a \in A) \qquad \text{および} \qquad \varphi(\varphi^{-1}(b)) = b \quad (\forall b \in B)$$

定義 2.7　f を区間 I で定義された関数とする．

(1) f が**単調増加**（または**減少**）であるとは，任意の $x_1, x_2 \in I$ に対して次式が成り立つときをいう．

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \big(\text{または } f(x_1) \geq f(x_2)\big)$$

(2) f が**狭義単調増加**（または**減少**）であるとは，任意の $x_1, x_2 \in I$ に対して次式が成り立つときをいう．

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \big(\text{または } f(x_1) > f(x_2)\big)$$

定理 2.7　f は閉区間 $[a,b]$ で定義された狭義単調増加な連続関数であるとする．このとき，$f:[a,b]\to[f(a),f(b)]$ は全単射であり，その逆関数 $f^{-1}:[f(a),f(b)]\to[a,b]$ が存在する．そして f^{-1} もまた狭義単調増加な連続関数になる．狭義単調増加を狭義単調減少に変えても同様である．

証明　狭義単調増加性より $f:[a,b]\to[f(a),f(b)]$ が単射であることは明らかである．また任意の $\alpha\in(f(a),f(b))$ に対して中間値の定理より $f(c)=\alpha$ となる $c\in(a,b)$ が存在する．したがって，f は全単射な関数でありその逆関数 $f^{-1}:[f(a),f(b)]\to[a,b]$ が存在する．ここで

$$\begin{aligned} a\le x_1<x_2\le b &\Leftrightarrow f(a)\le f(x_1)<f(x_2)\le f(b)\\ \therefore\quad a\le f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)\le b &\Leftrightarrow f(a)\le y_1<y_2\le f(b)\end{aligned}$$

ゆえに，f^{-1} もまた狭義単調増加関数である．

次に f^{-1} の連続性を示す．$y_0\in(f(a),f(b))$ とすると，$f(x_0)=y_0$ を満たす $x_0\in(a,b)$ が存在する．任意の $\varepsilon>0$ に対して（必要であれば ε を小さく取り直すことにより一般性を失うことなく $a\le x_0-\varepsilon<x_0+\varepsilon\le b$ と仮定してよい）$\delta:=\min\{y_0-f(x_0-\varepsilon),f(x_0+\varepsilon)-y_0\}>0$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x_0-\varepsilon)\le y_0-\delta \quad &\text{かつ}\quad f(x_0+\varepsilon)\ge y_0+\delta\\ \therefore\quad x_0-\varepsilon\le f^{-1}(y_0-\delta)\quad &\text{かつ}\quad x_0+\varepsilon\ge f^{-1}(y_0+\delta)\end{aligned}$$

したがって $|y-y_0|<\delta$ を満たす任意の $y\in[f(a),f(b)]$ に対して，$y_0-\delta<y<y_0+\delta$ より

$$x_0-\varepsilon\le f^{-1}(y_0-\delta)<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_0+\delta)\le x_0+\varepsilon \qquad \therefore\quad |f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon$$

これは f^{-1} が $y_0\in(f(a),f(b))$ において連続であることを示している．同様にして，$y=f(a),f(b)$ における連続性も示される．（証明終）

定理 2.7 における閉区間 $[a,b]$ を，開区間 (a,b) あるいは半開区間 $[a,b),(a,b]$ に変えても同様な結果が成り立つ．

例 2.4（対数関数）　Napier 数 e を底とする指数関数を $f(x)=e^x$ とおく．f は $\mathbf{R}$ で連続な狭義単調増加関数であり，

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

したがって，定理 2.7 より関数 $f:\mathbf{R}\to(0,\infty)$ は全単射であってその逆関数 $f^{-1}:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ が存在し，f^{-1} は狭義単調増加な連続関数となることが分かる．この逆関数を $f^{-1}(x)=\log x$ と書き（e を底とする）対数関数と呼ぶ．

いったん対数関数 $\log x$ が定義されれば，高校のときに学んだ指数関数に対する関係式

$$a^x=e^{x\log a}\qquad (a>0,x\in\mathbf{R}) \tag{2.9}$$

を定義式と思うことにより指数関数 a^x が定義され，定理 2.3 より指数関数 a^x の連続性が従う．

例 2.5（逆三角関数）　三角関数 $\cos x,\sin x,\tan x$ は 2π 周期関数で単調性はない．したがって，そのままでは逆関数を考えることはできないので，それらの定義域および値域を以下のように制限しよう．

$$\begin{aligned}&\cos x:[0,\pi]\to[-1,1]\\ &\sin x:\left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]\\ &\tan x:\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}\end{aligned}$$

このとき，$\cos x$ は狭義単調減少，$\sin x, \tan x$ は狭義単調増加な上への写像となり，定理 2.7 よりそれらの逆関数が存在する．その逆関数を，それぞれ

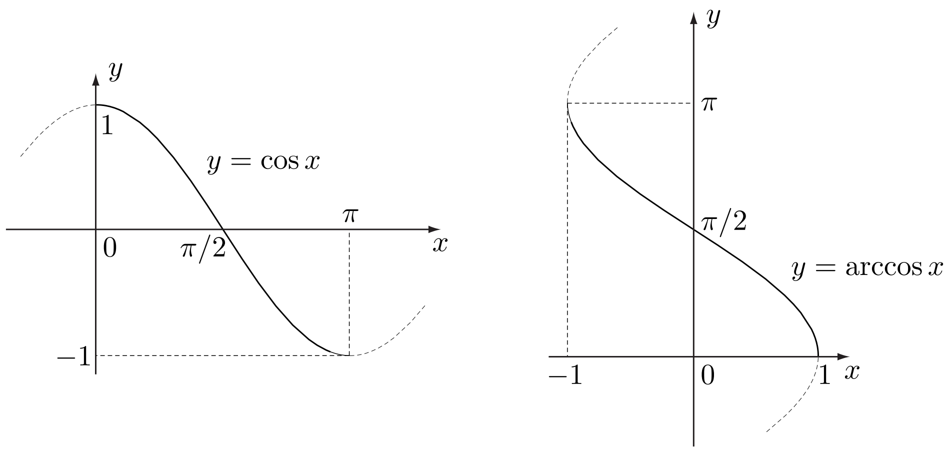
$$\cos^{-1} x,\ \sin^{-1} x,\ \tan^{-1} x \qquad \text{あるいは} \qquad \arccos x,\ \arcsin x,\ \arctan x$$

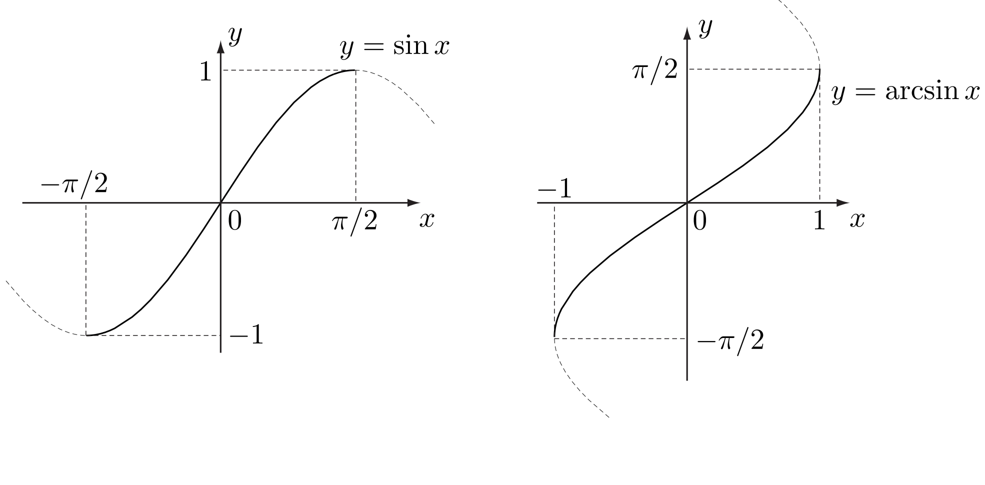
と書き**逆三角関数**という．これら逆三角関数の定義域および値域は以下のようになる．

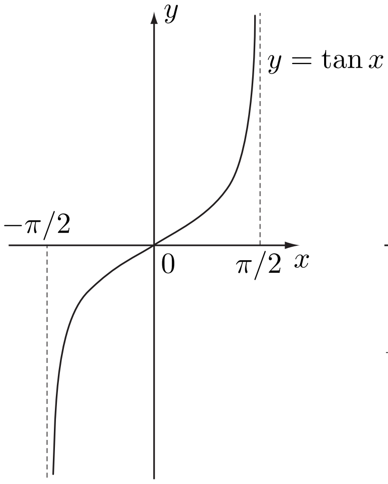
$$\begin{aligned} &\arccos x : [-1,1] \to [0,\pi] \\ &\arcsin x : [-1,1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \\ &\arctan x : \mathbf{R} \to \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

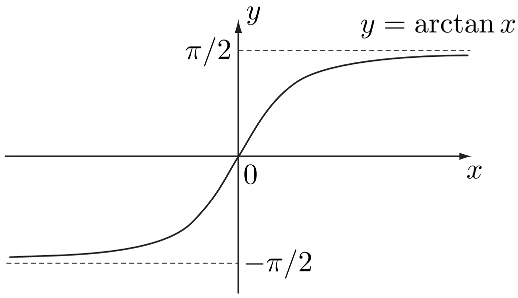
定理 2.7 より，$\arccos x$ は狭義単調減少な連続関数，$\arcsin x, \arctan x$ は狭義単調増加な連続関数になる．$\cos^{-1} x$ は $(\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}$ と混同されやすいので注意しよう．

上では，例えば三角関数 $\cos x$ の逆関数を定義するためにその定義域を $[0,\pi]$ に制限したが，この区間に制限する必然性はなく，$[-\pi, 0]$ に制限してやれば狭義単調増加な逆三角関数が定義される．このときの逆三角関数の値域は $[0,\pi]$ ではなく $[-\pi, 0]$ となる．このように三角関数が単調になる区間は無数にあり，それに応じて異なった逆三角関数が定義される．それらの逆三角関数と区別するために，(2.10) で定めた逆三角関数は**主値**をとるという．









問 2.9　逆三角関数 $\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$ は主値をとるものとする．このとき以下の表を完成させよ．

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$									
$\arccos x$									

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$							

問 2.10　逆三角関数に関して次式が成り立つことを証明せよ．

(1)　$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$
(2)　$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$
(3)　$\cos(\arctan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
(4)　$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$

逆三角関数の定義より，それらの定義域である任意の x に対して

$$\cos(\arccos x)=x,\quad \sin(\arcsin x)=x,\quad \tan(\arctan x)=x$$

が成り立つ．一方，$\arccos(\cos x)$ および $\arcsin(\sin x)$ は任意の実数 x に対して，また $\arctan(\tan x)$ は $\tan x$ が定義されている任意の x に対して定義されているが，

$\arccos(\cos x)=x$ が成り立つのは $0\le x\le\pi$のときのみ
$\arcsin(\sin x)=x$ が成り立つのは $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$のときのみ
$\arctan(\tan x)=x$ が成り立つのは $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$のときのみ

であることに注意しよう．例えば，$\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$ のときには $\arcsin(\sin x)=\pi-x$ となる．

第3章　微分法

3.1　微分係数と導関数

高校の時に学んだ微分係数と導関数の復習から始めよう．

定義 3.1　$I=(a,b)$ を開区間，$x_0 \in I$ および f を I で定義された関数とする．

(1)　f が x_0 で**微分可能**であるとは，極限値

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

が存在するときをいう．このとき，$f'(x_0)$ を f の x_0 における**微分係数**という．

(2)　f が I で**微分可能**であるとは，f が I の各点 x_0 で微分可能であるときをいう．このとき，I の各点 $x \in I$ を $f'(x)$ に対応させる I で定義された関数 f' が定まるが，これを f の**導関数**という．この導関数は次のように書かれたりもする．

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(3)　f' の導関数 $f''=(f')'$ を f の **2 階導関数**という．一般に，

$$f^{(0)} := f, \qquad f^{(n)} := (f^{(n-1)})' \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

により帰納的に定義される関数 $f^{(n)}$ を（それらが存在するとき）f の $\boldsymbol{n}$ **階導関数**という．

微分可能性は連続性よりも強い性質であり，次の定理 3.1 で示されるように，微分可能であれば連続であることが分かる．しかし，その逆は一般には成り立たないことに注意しよう．それは，例えば，関数 $f(x)=|x|$ の $x=0$ における様子を眺めてみれば明らかであろう．

定理 3.1　開区間 I で定義された関数 f が x_0 $(\in I)$ において微分可能ならば，f は x_0 において連続である．

証明　$x \to x_0$ のとき

$$f(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+f(x_0) \to f'(x_0)\cdot 0 + f(x_0) = f(x_0)$$

となることに注意すればよい．（証明終）

高校のときに学んだ基本的な関数の導関数を思い出そう．

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\ (n\in\mathbf{N}), \quad \frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

最初の公式を示すことは易しいが，残りの公式を厳密に証明することはそれらの関数の定義にも関わってくることなので簡単ではない．（もちろん，直感に基づいた証明を与えることは難しくない．）ここではこれらの公式が成り立つことを認めて先に進むことにする．

定理 3.2　f, g が開区間 I で微分可能であれば，$\alpha f+\beta g$ (α, βは定数)，fg，f/g ($g(x)\neq 0$) もまた I で微分可能であり次式が成り立つ．

(1)　$(\alpha f+\beta g)'(x)=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$　（微分の線形性）

(2)　$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$　（積の微分法）

(3)　$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$　（商の微分法）

証明　(2) を示そう．導関数の定義および定理 2.1 より

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}&=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\&\to f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\quad (h\to 0)\end{aligned}$$

これより (2) が従う．(1) および (3) の証明は問として残しておく．(証明終)

問 3.1　定理 3.2 の (1) および (3) を証明せよ．

例 3.1　(1)　積の微分法より

$$\frac{d}{dx}(e^x\sin x)=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

(2)　商の微分法より

$$\frac{d}{dx}\tan x=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

3.2　合成関数・逆関数の微分法

定理 3.3（合成関数の微分法）　f は開区間 I で微分可能，g は開区間 J で微分可能，f と g は合成可能であるとする．このとき，合成関数 $g\circ f$ もまた I で微分可能であり次式が成り立つ．

$$\frac{d}{dx}g(f(x))=g'(f(x))f'(x)$$

証明　$x_0\in I$ を任意に固定する．$y_0:=f(x_0)$ とおき，開区間 J で定義された関数 g_1 を次式で定める．

$$g_1(y):=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & (y\neq y_0)\\ g'(y_0) & (y=y_0)\end{cases}$$

このとき，g_1 は開区間 J で連続であり，任意の $x\in I$ $(x\neq x_0)$ に対して次の恒等式が成り立つ．

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=g_1(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\tag{3.1}$$

ここで，g_1 が連続であり f が微分可能であることから，$x\to x_0$ のときこの右辺は $g_1(f(x_0))f'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$ に収束する．これは $g\circ f$ が x_0 で微分可能であり，その微分係数が $g'(f(x_0))f'(x_0)$ であることを示している．(証明終)

この合成関数の微分法は既に高校において習っている．高校教科書における証明では「合成関数 $g \circ f$ の差分商を次のように変形し，

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$x \to x_0$ のとき（$f(x) \to f(x_0)$ であるから）この右辺は $g'(f(x_0))f'(x_0)$ に収束する」と説明しているであろう．しかしながら，例えば定数関数のように，たとえ $x \neq x_0$ であっても $f(x) = f(x_0)$ となる場合があり，このときには上式の右辺は意味をもたなくなってしまう．このような困難を回避するために，上の証明では補助的な関数 g_1 を導入して (3.1) のような変形を行ったのである．

この合成関数の微分の公式を書かせる問題を出すとほとんどすべての人が正しい式を書くことができる．しかし，ちょっとだけ複雑な関数の合成関数を具体的に与え，その微分を計算させると計算ミスをする人が非常に多い．公式を覚えることは大事であるが，その形だけを覚えるのでなく，具体的な関数に間違いなく適用できるようにしよう．この合成関数の微分法は簡単だと見下されがちであるが，具体的な計算において落とし穴にはまってしまわないよう十分に気をつけよう．

定理 3.4（逆関数の微分法）　f は開区間 I で微分可能であり $f'(y) > 0$ $(\forall y \in I)$ あるいは $f'(y) < 0$ $(\forall y \in I)$ とする．このとき，f の逆関数 $f^{-1} : f(I) \to I$ が存在し，f^{-1} も $f(I)$ で微分可能であり次式が成り立つ．

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

証明　$f'(y) > 0$ $(\forall y \in I)$ としよう．このとき，後に紹介する定理 3.7 より f は I で狭義単調増加である．それゆえ，定理 2.7 より逆関数 $f^{-1} : f(I) \to I$ が存在する．さて，$x_0 \in f(I)$ を任意に固定し $y_0 := f^{-1}(x_0)$ とおく．このとき，任意の $x \in f(I)$ $(x \neq x_0)$ に対して $y := f^{-1}(x)$ とおくと $y \neq y_0$ であり次式が成り立つ．

$$\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)} = \frac{1}{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}}$$

ここで，定理 2.7 より f^{-1} は連続であるから，$x \to x_0$ のとき $y \to y_0$ であり上式の右辺は $\frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$ に収束する．これは f^{-1} が x_0 で微分可能であり，その微分係数が $\frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$ であることを示している．$f'(y) < 0$ $(\forall y \in I)$ のときも全く同様にして示される．(証明終)

上の証明では，逆関数 f^{-1} の微分可能性の証明とその導関数の計算を同時に行った．しかし，予め逆関数 f^{-1} の微分可能性が示されていれば，その導関数は次のようにして容易に計算される．恒等式 $f(f^{-1}(x)) = x$ の両辺を x で微分し，合成関数の微分法（定理 3.3）を用いれば

$$f'(f^{-1}(x)) \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 1$$

となり，望みの導関数が従う．

例 3.2　(1)　$f(y) = e^y$ により $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$ を定めると，$f^{-1}(x) = \log x$ および $f'(y) = e^y = f(y)$．ゆえに $f'(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ となり，逆関数の微分法より次式が従う．

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$$

(2) $f(y)=\sin y$ により $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-1,1)$ を定めると，$f^{-1}(x)=\arcsin x$ および $f'(y)=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-(f(y))^2}$ が成り立つ．ここで，$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ より $\cos y>0$ ということを用いた．ゆえに $f'(f^{-1}(x))=\sqrt{1-x^2}$ となり，逆関数の微分法より次式が従う．

$$\frac{d}{dx}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad(|x|<1)$$

(3) $f(y)=\cos y$ により $f:(0,\pi)\to(-1,1)$ を定めると，$f^{-1}(x)=\arccos x$ および $f'(y)=-\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-(f(y))^2}$ が成り立つ．ここで，$0<y<\pi$ より $\sin y>0$ ということを用いた．ゆえに $f'(f^{-1}(x))=-\sqrt{1-x^2}$ となり，逆関数の微分法より次式が従う．

$$\frac{d}{dx}\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad(|x|<1)$$

問 3.2 $\frac{d}{dx}\arctan x=\frac{1}{1+x^2}$ となることを示せ．

例 3.3 指数関数の定義式 (2.9) および合成関数の微分法を用いれば，以下の指数関数に対する導関数を計算することができる．

(1) $\frac{d}{dx}a^x=a^x\log a\quad(x\in\mathbf{R},\ a>0)$
実際，a^x は $f(x)=x\log a$ と $g(y)=e^y$ との合成関数 $a^x=e^{x\log a}=(g\circ f)(x)$ であるから，$f'(x)=\log a$ および $g'(y)=e^y$ に注意して合成関数の微分法を用いればよい：

$$\frac{d}{dx}a^x=\frac{d}{dx}e^{x\log a}=e^{x\log a}(x\log a)'=a^x\log a$$

(2) $\frac{d}{dx}x^a=ax^{a-1}\quad(x>0,\ a\in\mathbf{R})$
実際，x^a は $f(x)=a\log x$ と $g(y)=e^y$ との合成関数 $x^a=e^{a\log x}=(g\circ f)(x)$ であるから，$f'(x)=\frac{a}{x}$ および $g'(y)=e^y$ に注意して合成関数の微分法を用いればよい：

$$\frac{d}{dx}x^a=\frac{d}{dx}e^{a\log x}=e^{a\log x}(a\log x)'=x^a\frac{a}{x}=ax^{a-1}$$

(3) $\frac{d}{dx}x^x=x^x(\log x+1)\quad(x>0)$
実際，x^x は $f(x)=x\log x$ と $g(y)=e^y$ との合成関数 $x^x=e^{x\log x}=(g\circ f)(x)$ であるから，$f'(x)=\log x+1$ および $g'(y)=e^y$ に注意して合成関数の微分法を用いればよい：

$$\frac{d}{dx}x^x=\frac{d}{dx}e^{x\log x}=e^{x\log x}(x\log x)'=x^x(\log x+1)$$

高校で習った対数微分法を使って次のように計算してもよい．$y=x^x$ とおいて両辺の対数をとると $\log y=x\log x$．この両辺を x で微分すると合成関数の微分法より $\frac{y'}{y}=\log x+1$ となり，$y'=y(\log x+1)=x^x(\log x+1)$ が得られる．
ただし，対数微分法を使うためには，厳密な意味では x^x の微分可能性を予め知っている必要がある．それに対して上の方法では，合成関数の微分法（定理 3.3）が x^x の微分可能性をも保証していることに注意しよう．

問 3.3 以下で定められる関数 f の導関数 f' を計算せよ．

(1) $f(x)=e^{-x^2}$
(2) $f(x)=x^{\sin x}\quad(x>0)$
(3) $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}\quad(x\neq 1)$

例 3.4　次式で定められる $\mathbf{R}$ 上の関数 f の導関数を計算しよう．

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$x \neq 0$ のとき，積の微分法，合成関数の微分法および商の微分法より

$$f'(x) = (x^2)' \sin\frac{1}{x} + x^2 \left(\frac{1}{x}\right)' \cos\frac{1}{x} = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

となる．次に $x = 0$ のときの導関数の値を計算する際,「$x \to 0$ のとき $f'(x)$ は収束しないので $f'(0)$ は存在しない」というような議論をする人が少なくないが，これは誤りである．上式はあくまで $x \neq 0$ のときにしか成り立っていないことに注意しよう．このような場合に $f'(0)$ を求めるためには，微分係数の定義に戻って次のように計算するしかない．

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0$$

これより，f は $\mathbf{R}$ で微分可能であり，その導関数は次式で与えられることが分かる．

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

なお，この導関数 f' は $x = 0$ で連続ではない．

問 3.4　以下で定められる関数 f の導関数を求めよ．

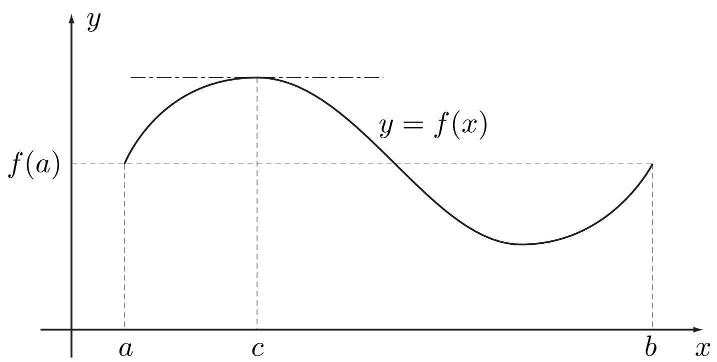
(1)　$f(x) = x|x|$

(2)　$f(x) = \begin{cases} |x| \arctan\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

3.3　平均値の定理と l'Hôpital の定理

高校のときに習った平均値の定理を詳しく述べよう．そのために，まず Rolle（ロール）の定理を紹介する．

定理 3.5（Rolle の定理）　関数 f は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能であり $f(a) = f(b)$ を満たすとする．このとき，$f'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が存在する．



証明　f が定数関数の場合は明らかであるから，f は定数関数でないとする．f は閉区間 $[a,b]$ で連続であるから定理 2.5 より，f は $[a,b]$ で最大値 $M=f(c_1)$ および最小値 $m=f(c_2)$ をとる．ここで，$c_1,c_2\in[a,b]$ である．f は定数関数でないから

$$M>f(a)\ \bigl(=f(b)\bigr)\qquad \text{あるいは}\qquad m<f(a)\ \bigl(=f(b)\bigr)$$

の少なくとも一方が成り立つ．$M>f(a)$ としよう．このとき，$c_1\neq a,b$ より $c_1\in(a,b)$．したがって，十分小さな正数 δ を取れば $|h|<\delta$ を満たすすべての実数 h に対して $c_1+h\in(a,b)$ が成り立つ．$M=f(c_1)$ が f の最大値であることから，

$$f(c_1+h)-f(c_1)\leq 0\quad(\forall h\in(-\delta,\delta))$$

この両辺を $h\ (\neq 0)$ で割ると，h の正負により不等号の向きが変わり

$$\frac{f(c_1+h)-f(c_1)}{h}\leq 0\qquad(\forall h\in(0,\delta))$$
$$\frac{f(c_1+h)-f(c_1)}{h}\geq 0\qquad(\forall h\in(-\delta,0))$$

となる．ここで $h\to\pm 0$ の極限を取れば，f が c_1 で微分可能であることから

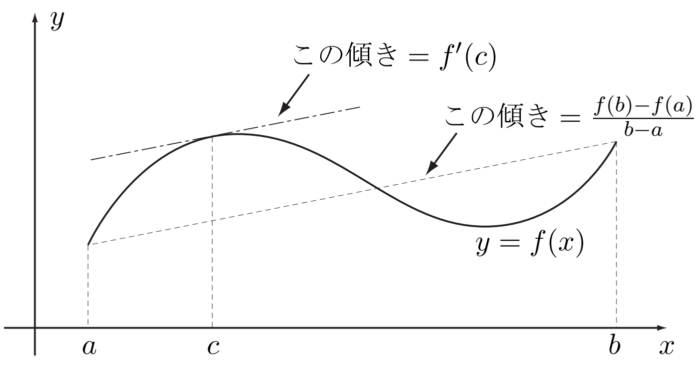
$$f'(c_1)=\lim_{h\to+0}\frac{f(c_1+h)-f(c_1)}{h}\leq 0$$
$$f'(c_1)=\lim_{h\to-0}\frac{f(c_1+h)-f(c_1)}{h}\geq 0$$

となり $f'(c_1)=0$ が得られる．$m<f(a)$ の場合も同様にして $f'(c_2)=0$ が示される．(証明終)

微分可能な関数 f が c で極大（あるいは極小）になれば $f'(c)=0$ である，という性質は既に高校で習った．上の Rolle の定理の証明では，この性質の証明も与えていることに注意しよう．

定理 3.6（平均値の定理）　関数 f は閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能であるとする．このとき，次式を満たす $c\in(a,b)$ が存在する．

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$



証明　関数 g を次式により定める．

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

このとき，関数 g もまた閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能であり $g(a)=g(b)\ \bigl(=f(a)\bigr)$ を満たす．したがって，Rolle の定理より $g'(c)=0$ を満たす $c\in(a,b)$ が存在する．ここで

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

に注意すれば望みの結果が従う．（証明終）

この平均値の定理より，微分可能な関数 f の増減はその導関数 f' の符号を調べればよいことが分かる．すなわち，次の定理が成り立つ．これは既に高校で習ってきたことだから，その証明は問として残しておこう．

定理 3.7　f を開区間 $I=(a,b)$ で微分可能な関数とする．

(1)　$f'(x)>0\ (\forall x\in I)$ ならば，f は I で狭義単調増加である．
(2)　$f'(x)<0\ (\forall x\in I)$ ならば，f は I で狭義単調減少である．
(3)　$f'(x)=0\ (\forall x\in I)$ ならば，f は I で定数である．

問 3.5　平均値の定理（定理 3.6）を用いて定理 3.7 を証明せよ．

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ のとき $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ を $\frac{0}{0}$ 型の**不定形の極限**といい，$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ のとき $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ を $\frac{\infty}{\infty}$ 型の**不定形の極限**という．ここで，$a=\pm\infty$ のときもある．これら不定形の極限を計算する強力な武器として l'Hôpital（ロピタル）の定理が知られている．この定理は高校教育の課程外であるが耳にしたことがある人も多いであろう．その l'Hôpital の定理を証明するために，上の平均値の定理を一般化した次の Cauchy の平均値定理を準備しておく．

定理 3.8（Cauchy の平均値定理）　関数 f,g は閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能であり，$g'(x)\neq 0\ (\forall x\in(a,b))$ とする．このとき，次式を満たす $c\in(a,b)$ が存在する．

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

証明　関数 h を次式により定める．

$$h(x) := \bigl(g(b)-g(a)\bigr)f(x) - \bigl(f(b)-f(a)\bigr)g(x)$$

このとき，関数 h もまた閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能であり $h(a)=h(b)\ \bigl(= g(b)f(a)-f(b)g(a)\bigr)$ を満たす．したがって，Rolle の定理より $h'(c)=0$，すなわち

$$\bigl(g(b)-g(a)\bigr)f'(c) = \bigl(f(b)-f(a)\bigr)g'(c)$$

を満たす $c\in(a,b)$ が存在する．また，定理 3.6（平均値の定理）より $g(b)-g(a)=g'(c_1)(b-a)$ を満たす $c_1\in(a,b)$ が存在するが，これと仮定より $g(b)\neq g(a)$ となることが分かる．そこで上式の両辺を $\bigl(g(b)-g(a)\bigr)g'(c)\ (\neq 0)$ で割れば望みの式が従う．（証明終）

定理 3.9（l'Hôpital の定理）関数 f, g は開区間 (a, b) で微分可能であり，$g'(x) \neq 0$ $(\forall x \in (a, b))$ を満たすとする．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0$ のとき，

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad \text{が存在すれば} \quad \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

となる．ここで，$l = \pm\infty$ でもよい．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = \infty$ のとき，

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad \text{が存在すれば} \quad \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

となる．ここで，$l = \pm\infty$ でもよい．

また，上の極限 $x \to a+0$ を，$x \to a-0$, $x \to a$, $x \to \pm\infty$ に変えても同様な結果が成り立つ．

証明 (1) $x = a$ における f, g の値を $f(a) := 0$，$g(a) := 0$ と定めると，f, g は $[a, b)$ において連続となる．したがって，任意の $x \in (a, b)$ に対して f, g は閉区間 $[a, x]$ で連続，開区間 (a, x) で微分可能である．以上のことと仮定より Cauchy の平均値定理を適用することができて，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす $c \in (a, x)$ が存在することが分かる．ここで，$x \to a+0$ のとき $c \to a+0$ であるから，望みの結果が従う．

(2) この場合の証明は (1) と比べるとやや面倒であるから，最初は読み飛ばしても構わない．ある程度大学の数学に慣れてきた時点でこの部分を読み返すのが適当であろう．

まず，$l \neq \pm\infty$ の場合を考える．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，仮定より

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon \qquad \therefore \quad l - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \varepsilon \quad (\forall x \in (a, a_1)) \tag{3.2}$$

を満たす a に十分近い $a_1 \in (a, b)$ が存在する．ここで，任意の $x \in (a, a_1)$ に対して f, g は閉区間 $[x, a_1]$ で連続，開区間 (x, a_1) で微分可能であり，$g(x) \neq g(a_1)$ が成り立つ．したがって，Cauchy の平均値定理より

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a_1)}{g(x)}}{1 - \frac{g(a_1)}{g(x)}} = \frac{f(x) - f(a_1)}{g(x) - g(a_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{3.3}$$

を満たす $c \in (x, a_1)$ が存在する．さらに，$\displaystyle\lim_{x \to a+0} g(x) = \infty$ より

$$1 - \frac{g(a_1)}{g(x)} > 0 \quad \text{および} \quad \left| \frac{f(a_1)}{g(x)} \right|, \left| \frac{g(a_1)}{g(x)} \right| < \varepsilon \quad (\forall x \in (a, a_2))$$

を満たす a に十分近い $a_2 \in (a, a_1)$ が存在する．(3.3) を (3.2) で $x = c$ とした式に代入し，$\frac{f(x)}{g(x)}$ について解くと

$$\frac{f(a_1)}{g(x)} + (l - \varepsilon)\left(1 - \frac{g(a_1)}{g(x)}\right) < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{f(a_1)}{g(x)} + (l + \varepsilon)\left(1 - \frac{g(a_1)}{g(x)}\right)$$

それゆえ，

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\left|\frac{f(a_1)}{g(x)}\right|+\varepsilon\left(1-\frac{g(a_1)}{g(x)}\right)+\left|l\frac{g(a_1)}{g(x)}\right|<\varepsilon(2+|l|+\varepsilon) \qquad \bigl(\forall x\in(a,a_2)\bigr)$$

となるが，これは $\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$ が成り立つことを示している．$l=\pm\infty$ の場合は，$\frac{f(x)}{g(x)}$ の代りに $\frac{g(x)}{f(x)}$ の極限を考え，$l=0$ の場合に帰着させればよい．

最後に，極限 $x\to a+0$ を $x\to a-0$ あるいは $x\to +0$ に変えても同様な結果が成り立つことは上の証明を見れば明らかであろう．そこで，$x\to\pm\infty$ に変えた場合を考える．このとき，$F(y):=f(1/y), G(y):=g(1/y)$ とおき $y\to\pm 0$ における不定形の極限としてとらえる．そして，既に証明した結果を用いて

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to\pm 0}\frac{F(y)}{G(y)}=\lim_{y\to\pm 0}\frac{F'(y)}{G'(y)}=\lim_{y\to\pm 0}\frac{f'(1/y)(-1/y^2)}{g'(1/y)(-1/y^2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

と計算すればよい.（証明終）

Cauchy の平均値定理を使わなくても，次のようにして l'Hôpital の定理（定理 3.9 (1)）を証明してもよいのでは？と考える人もいるであろう．

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a+0}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

確かに，$f'(a), g'(a)$ が存在し，かつ $g'(a)\neq 0$ である場合にはそれでもよい．しかし実用上は，$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ もまた不定形の極限になっており，$g'(a)\neq 0$ という仮定は満たされない場合が多い．このようなことも考慮に入れて，上の証明では Cauchy の平均値定理を使っているのである．

例 3.5 (1) $x\to +0$ のときの $x\log x$ の極限は，$\frac{\log x}{1/x}$ と書きなおすことにより $\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形の極限となる．したがって，l'Hôpital の定理より

$$\lim_{x\to +0}x\log x=\lim_{x\to +0}\frac{\log x}{1/x}=\lim_{x\to +0}\frac{(\log x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to +0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

これより，$\lim_{x\to +0}x^x=\lim_{x\to +0}e^{x\log x}=e^0=1$ も得られる．

(2) 次のように l'Hôpital の定理を続けて用いる場合もある．

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

問 3.6 次の極限値を求めよ．

(1) $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

(2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \qquad (a,b>0)$

(3) $\lim_{x\to +0}\left(\frac{1}{\sin x}\right)^x$

3.4　高階導関数と Taylor 展開

定義 3.2　n を自然数とし，f を開区間 I で定義された関数とする．

(1)　f が I で **n 回微分可能**であるとは，I の各点 x で f の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ が存在するときをいう．この n 階導関数は次のように書かれたりもする．

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x), \qquad \frac{d^n}{dx^n}f(x), \qquad \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)$$

(2)　f が I で **n 回連続微分可能**あるいは f が I で **C^n 級**であるとは，f が I で n 回微分可能であり，かつ n 階導関数 $f^{(n)}$ が I で連続であるときをいう．さらに，f が I で**無限回微分可能**あるいは f が I で **C^∞ 級**であるとは，f が I で何回でも微分可能であるときをいう．

(3)　I で n 回連続微分可能な関数全体の集合を $\boldsymbol{C^n(I)}$ と書き，I で無限回微分可能な関数全体の集合を $\boldsymbol{C^\infty(I)}$ と書く．

n 階導関数の簡単な計算例を紹介しておこう．

例 3.6　(1)　$\frac{d}{dx}e^x = e^x$ より，$\frac{d^n}{dx^n}e^x = e^x$

(2)　$\frac{d}{dx}a^x = a^x \log a$ より，$\frac{d^n}{dx^n}a^x = a^x(\log a)^n$

(3)　$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ より，$\frac{d^n}{dx^n}\sin x = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$

(4)　$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ より，$\frac{d^n}{dx^n}\cos x = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$

(5)　m を自然数とするとき，$\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$ より

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n} & (n \leq m) \\ 0 & (n > m) \end{cases}$$

(6)　$\frac{d}{dx}(a-x)^{-m} = m(a-x)^{-(m+1)}$ $(m \in \mathbf{N})$ より，$\frac{d^n}{dx^n}(a-x)^{-1} = n!(a-x)^{-(n+1)}$

問 3.7　$f, \phi \in C^3(\mathbf{R})$ に対して，f と ϕ の合成関数を $F(x) := f(\phi(x))$ とおく．このとき，$F''(x)$ および $F'''(x)$ を f, ϕ およびそれらの導関数を用いて書き表せ．

定理 3.2 において積の微分法を紹介したが，高階導関数に対する積の微分法として次の Leibniz（ライプニッツ）の公式が知られている．その公式は数学的帰納法と二項係数に対する関係式を用いて比較的容易に証明されるので，その証明は問として残しておく．

定理 3.10（Leibniz の公式）f, g が I で n 回微分可能であれば，次の等式が成り立つ．

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

問 3.8　Leibniz の公式（定理 3.10）を証明せよ．

例 3.7　(1)　任意の自然数 n に対して，Leibniz の公式より

$$\frac{d^n}{dx^n}(xe^x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{d^k}{dx^k}x\right)\left(\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}e^x\right) = \binom{n}{0}xe^x + \binom{n}{1}e^x = (x+n)e^x$$

(2)　$n \geq 2$ を満たす任意の自然数 n および n 回微分可能な関数 f に対して，Leibniz の公式より

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}\bigl(x^2 f(x)\bigr) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{d^k}{dx^k}x^2\right)f^{(n-k)}(x)\\ &= \binom{n}{0}x^2 f^{(n)}(x) + \binom{n}{1}2xf^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}2f^{(n-2)}(x)\\ &= x^2 f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x)\end{aligned}$$

上の例では 2 つの関数の積の n 階導関数を計算するために Leibniz の公式を用いたが，やみくもに Leibniz の公式を用いるべきではない．場合によっては，2 階導関数，3 階導関数を具体的に計算して n 階導関数の形を予測し，数学的帰納法を用いてそれが正しいことを示すほうが計算が非常に簡単になる．例えば，$e^x \sin x$ の n 階導関数を Leibniz の公式を用いて計算すると非常に複雑な形になるが，例 3.1 で見たように計算すれば，$\frac{d^n}{dx^n}(e^x \sin x) = \sqrt{2}^n e^x \sin\bigl(x + \frac{n}{4}\pi\bigr)$ となることが数学的帰納法によって示される．

問 3.9　以下で定められる関数 f の n 階導関数 $f^{(n)}$ を計算せよ．

(1)　$f(x) = \log x$
(2)　$f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$
(3)　$f(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$　(α は定数)

問 3.10　$f(x) = \arctan x$ とおく．$(1+x^2)f'(x) = 1$ の両辺を微分してから $x = 0$ を代入し，$f^{(n)}(0)$ に対する漸化式を導くことによって $f^{(n)}(0)$ を求めよ．

次に平均値の定理（定理 3.6）を精密化した Taylor（テイラー）の定理を紹介しよう．

定理 3.11（Taylor の定理）　f は開区間 I で n 回微分可能な関数とし，$a, b \in I$ は $a \neq b$ を満たすとする．このとき，次式を満たす a と b の間の実数 c が存在する．

$$\begin{aligned}f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n\end{aligned}$$

証明　次式により実数 A を定める．

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{A}{n!}(b-a)^n \quad \text{すなわち} \quad A = \frac{n!}{(b-a)^n}\left\{f(b) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right\}$$

このとき，$A = f^{(n)}(c)$ となる a と b の間の実数 c が存在することを示せばよい．

$$\begin{aligned}g(x) :=& f(b) - \left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{A}{n!}(b-x)^n\right\}\\ =& f(b) - \left\{f(x) + f'(x)(b-x) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + \frac{A}{n!}(b-x)^n\right\}\end{aligned}$$

により関数 g を定めよう．f は n 回微分可能であり，この右辺には f の $n-1$ 階までの導関数しか表れていないので g は I で微分可能な関数ある．さらに，定数 A の定め方から $g(a)=g(b)=0$ が成り立つ．したがって，Rolle の定理より $g'(c)=0$ となる a と b の間の実数 c が存在する．ここで，

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left\{f^{(k+1)}(x)(b-x)^k+f^{(k)}(x)(-k)(b-x)^{k-1}\right\}+\frac{A}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\\
&= -\sum_{k=0}^{n-2}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k-\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\\
&\quad +\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}+\frac{A}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\\
&= \frac{A-f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}
\end{aligned}
$$

より $A=f^{(n)}(c)$ が従う.（証明終）

$n=1$ のとき，この Taylor の定理は平均値の定理に他ならないことに注意しよう．

異なる 2 つの実数 a,b の間にある任意の実数 c は，$0<\theta<1$ を満たす適当な θ を用いて $c=a+\theta(b-a)$ という形に書き表されることに注意し，Taylor の定理（定理 3.11）において $b=x$ とすれば，直ちに次の定理が従う．

定理 3.12（有限 Taylor 展開）　f は開区間 I で n 回微分可能な関数とし，$a\in I$ とする．このとき，関数 f は次の形の有限和に展開される．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n(x)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x) \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

ここで，$R_n(x)$ は**剰余項**と呼ばれ，任意の $x\in I$ に対して適当な $\theta\in(0,1)$ を取れば次の形に書き表される．

$$
R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n
$$

この剰余項には何通りかの書き表し方があるが（第 5.4 節の例 5.3 を参照せよ），上の形を **Lagrange（ラグランジュ）の剰余**という．(3.4) 式の右辺を，関数 f の a の周りでの（あるいは a を中心とした）**有限 Taylor 展開**という．特に，$a=0$ の周りでの有限 Taylor 展開を**有限 Maclaurin（マクローリン）展開**という．

$\lim_{x\to a} f(x)=0$ という記号は，$x\to a$ のとき関数 $f(x)$ が 0 に収束することを意味しているが，ただ単に「0 に収束する」という情報だけでなく「どの位の速さで 0 に収束するのか？」という情報が必要になったり，その情報を用いることで様々な計算が見通しよく行える場合がある．例えば，$x\to 0$ のとき，x^2 の方が x よりも速く 0 に収束し，さらに x^3 の方が x^2 よりも速く 0 に収束する．一般に，$f(x)=x^m$ は m が大きくなればなるほど，$x\to 0$ のとき速く 0 に収束する．このことは，次の表を眺めてみれば理解されよう．

$h = 0.1$	のとき，	$h^2 = 0.01$	$h^4 = 0.0001$	$h^6 = 0.000001$
$h = 0.01$	のとき，	$h^2 = 0.0001$	$h^4 = 0.00000001$	$h^6 = 0.000000000001$
$h = 0.001$	のとき，	$h^2 = 0.000001$	$h^4 = 0.000000000001$	$h^6 = 0.000000000000000001$

このような収束の速さを比較したり極限の計算に応用する際，次に紹介する **Landau（ランダウ）の記号**が非常に役に立つ.

定義 3.3（Landau の記号）　f, g, h を開区間 I で定義された関数とし，$a \in I$ とする.

(1)　ある（十分大きな）定数 $C > 0$ および（十分小さな）定数 $\delta > 0$ が存在して，$0 < |x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して $\left|\dfrac{f(x)-g(x)}{h(x)}\right| \leq C$ が成り立つことを次のように書く.

$$f(x) = g(x) + O(h(x)) \quad (x \to a)$$

(2)　$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)-g(x)}{h(x)} = 0$ が成り立つことを次のように書く.

$$f(x) = g(x) + o(h(x)) \quad (x \to a)$$

(3)　$g(x) \equiv 0$ の場合，上の記号をそれぞれ $f(x) = O(h(x))$ $(x \to a)$ および $f(x) = o(h(x))$ $(x \to a)$ のように書く.

　この Landau の記号 $O(h(x))$ および $o(h(x))$ が使われる際，関数 h としては，$h(x) = (x-a)^m$ という（$x \to a$ のとき 0 に収束する）単項式が使われることが非常に多い．Landau の記号は，いったん慣れてしまえば，非常に便利で使いやすい記号だと思うことであろう．しかしながら，上の定義は汎用性を高めるために一般的に書かれているので，初めて習う諸君には何を意味している記号か直ぐには理解できないかもしれない．そこでもう少し噛み砕いて説明しよう．h としてこのように 0 に収束する関数が使われている場合，$f(x) = O(h(x))$ とは $f(x)$ が $h(x)$ と同じ位の速さかあるいは $h(x)$ よりも速く 0 に収束ことを意味しており，$f(x) = o(h(x))$ とは $f(x)$ が $h(x)$ よりも真に速く 0 に収束することを意味する．したがって，$f(x) = o(h(x))$ であれば $f(x) = O(h(x))$ が成り立つ．しかしながら，$f(x) = O(h(x))$ という記号は $f(x)$ が $h(x)$ と同じ位の速さで収束するときに（すなわち，$h(x) = O(f(x))$ も同時に成り立つときに）使われる場合が多い.

　例えば，$x \to 0$ のとき $f(x) = 10^{23}x^3 + 10^{-23}x^2$ という関数の各項を見てみると，x がそれ程小さくないときには $10^{-23}x^2$ の方が $10^{23}x^3$ よりも小さいが，x が小さくなればなるほど $10^{23}x^3$ の方が $10^{-23}x^2$ よりも圧倒的に小さくなる．x^3 の係数 10^{23} は非常に大きく x^2 の係数 10^{-23} は非常に小さな数であるが，$x \to 0$ のときの収束の速さを考える際にはさほど影響はないのである．収束の速さに影響があるのは x の指数である．そこで，

$$10^{23}x^3 + 10^{-23}x^2 = O(x^2) \qquad (x \to 0) \tag{3.5}$$

と書くのである．実際，$|x| \leq 1$ を満たす任意の実数 x に対して

$$\left|\frac{10^{23}x^3 + 10^{-23}x^2}{x^2}\right| = |10^{23}x + 10^{-23}| \leq 10^{23} + 10^{-23}$$

が成り立つので，$\delta = 1$ および $C = 10^{23} + 10^{-23}$ として定義における条件が満たされていることが分かる．一方，

$$\lim_{x \to 0} \frac{10^{23}x^3 + 10^{-23}x^2}{x} = \lim_{x \to 0}(10^{23}x^2 + 10^{-23}x) = 0$$

であるから，次のようにも書ける．

$$10^{23}x^3 + 10^{-23}x^2 = o(x) \qquad (x \to 0)$$

ただし，このように書いてしまうと (3.5) よりも情報量が失われていることに注意しよう．Landau の記号の分かりづらさは，このように Landau の記号を用いた書き表し方が一通りではないことかもしれない．これについては慣れてもらうしかないであろう．

なお，$f(x) = g(x) + O(h(x))$ とは，$O(h(x))$ 程度の誤差を無視すれば $f(x)$ と $g(x)$ は等しい，と読むと分かりやすいであろう．また，$f(x) = o(1)$ $(x \to a)$ は $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ に他ならない．

問 3.11　Landau の記号に関する以下の事項を証明せよ．

(1)　$f(x) = O(x^m)$ $(x \to 0)$ および $g(x) = O(x^n)$ $(x \to 0)$ ならば，$f(x)g(x) = O(x^{m+n})$ $(x \to 0)$ および $f(x) + g(x) = O(x^l)$ $(x \to 0)$ が成り立つ．ただし，$l = \min\{m, n\}$ である．

(2)　$f(x) = g(x) + O(h(x))$ $(x \to a)$ および $\phi(x) = a + o(1)$ $(x \to a)$ ならば，$f(\phi(x)) = g(\phi(x)) + O(h(\phi(x)))$ $(x \to a)$ が成り立つ．

(3)　$f(x) = b + O(h(x))$ $(x \to a)$，$b \neq 0$ および $h(x) = o(1)$ $(x \to a)$ ならば，$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b} + O(h(x))$ $(x \to a)$ が成り立つ．

この Landau の記号を使うと，面倒な剰余項を定理 3.12 のように正確に丁寧に書く必要がなくなり，次の定理が成り立つ．

定理 3.13　$f \in C^n(I)$ および $a \in I$ に対して次式が成り立つ．

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) \qquad (x \to a)$$

特に，$f \in C^\infty(I)$ とすると，任意の自然数 n および $a \in I$ に対して次式が成り立つ．

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + O((x-a)^{n+1}) \qquad (x \to a)$$

証明　関数 h を

$$h(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

により定め，定理 3.12 より次式が成り立つことに注意すればよい．

$$\frac{h(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!}\left\{f^{(n)}(a + \theta(x-a)) - f^{(n)}(a)\right\} \to 0 \qquad (x \to a)$$

ここで，$f^{(n)}$ の連続性および $0 < \theta < 1$ であることを用いた．(証明終)

定理 3.13 が述べていることを噛み砕いて説明すると，f が C^n 級関数であるとき，a に十分近い場所にある x に対しては，$o((x-a)^n)$ 程度の誤差を無視すれば $f(x)$ を n 次多項式 $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ で近似できることを主張しているのである．$n = 1$ のときは 1 次式 $f(a) + f'(a)(x-a)$ で近似されることになるが，このような近似は **1 次近似**あるいは**線形近似**と呼ばれている．$y = f(x)$ のグラフを $x = a$ において線形近似したものがそのグラフの接線であることに注意しよう．

次の例からも分かるように，Landau の記号を使うことにより具体的な関数の有限 Taylor 展開をすっきりとした形で書くことができる．しかし，Landau の記号を使うと $x = a$ の近くでの様子は分かりやすくなるが，そこから離れた場所における情報は失われてしまっていることに注意しよう．そのような情報も必要になる場合は，剰余項をしっかりと書いた (3.4) 式を使わなければならない．

例 3.8　(1)　$f(x) = e^x$ とすると $f^{(n)}(0) = 1$ となる．したがって，e^x の有限 Maclaurin 展開は次のようになる．

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}) \qquad (x \to 0)$$

(2)　$f(x) = \sin x$ とすると $f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n}{2}\pi\right)$，それゆえ $f^{(2m)}(0) = 0$，$f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m$ となる．したがって，$\sin x$ の有限 Maclaurin 展開は次のようになる．

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + O(x^{2m+3}) \qquad (x \to 0)$$

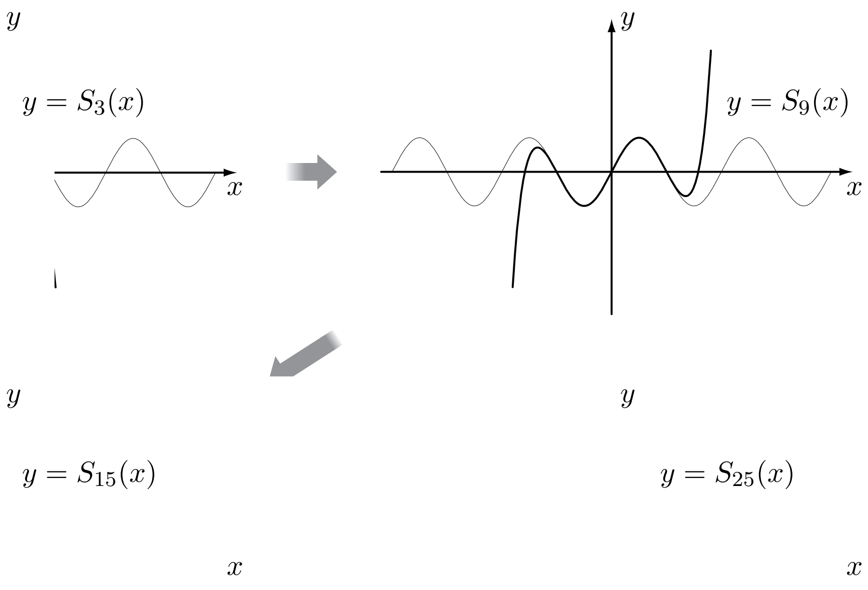
(3)　$f(x) = \cos x$ とすると $f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{n}{2}\pi\right)$，それゆえ $f^{(2m)}(0) = (-1)^m$，$f^{(2m+1)}(0) = 0$ となる．したがって，$\cos x$ の有限 Maclaurin 展開は次のようになる．

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + O(x^{2m+2}) \qquad (x \to 0)$$

三角関数 $f(x) = \sin x$ の有限 Maclaurin 展開の剰余項を無視して得られる多項式を

$$S_{2n-1}(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

とおこう．n の値をいろいろ変えてみて $y = S_{2n-1}(x)$ のグラフを描くと以下のようになる．n を大きくすればする程，元の三角関数 $y = \sin x$ をより広い範囲でより精密に近似していることが見て取れるであろう．



$f \in C^\infty(I)$ および $a \in I$ とすると，定理 3.12 より任意の $x \in I$ および $n \in \mathbf{N}$ に対して有限 Taylor 展開 (3.4) が成り立つ．その剰余項 $R_n(x)$ が各 $x \in I$ を固定するごとに

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \tag{3.6}$$

を満たすとき，関数 f は次のように級数展開される．

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (x \in I)$$

この右辺の級数を関数 f の a の周りでの（あるいは a を中心とした）**Taylor 展開**という．特に，$a=0$ の周りでの Taylor 展開を **Maclaurin 展開**という．

任意の項まで有限 Taylor 展開可能であっても，条件 (3.6) が満たされるとは限らない，それゆえ Taylor 展開可能であるとは限らないことに注意しよう．実際，

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

によって定められる関数 f は $\mathbf{R}$ で無限回微分可能であるが，$x=0$ の周りでは Taylor 展開不可能であることが知られている．余力のある諸君はそれを証明してみよう．

次の定理は C^∞ 級関数が Taylor 展開可能であるための 1 つの十分条件を与えている．

定理 3.14 $f \in C^\infty(I)$ に対して，（x および n に無関係な）定数 $C, M > 0$ が存在して，

$$|f^{(n)}(x)| \leq CM^n \qquad (\forall x \in I\ \forall n \in \mathbf{N})$$

が成り立つとき，f は I の各点 a の周りで Taylor 展開可能である．

証明 (3.4) 式における剰余項 $R_n(x)$ に対して，各 $x \in I$ を固定するごとに

$$|R_n(x)| \leq \frac{CM^n}{n!}|x-a|^n = C\frac{(M|x-a|)^n}{n!} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

が成り立つことに注意すればよい．(証明終)

例 3.9 $f(x) = \sin x$ とすると $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ であるから，$\sin x$ は $\mathbf{R}$ の各点で Taylor 展開可能である．さらに，$\sin x$ の Maclaurin 展開は次のようになる．

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

同様に，$\cos x$ および e^x も $\mathbf{R}$ の各点で Taylor 展開可能であり，それらの Maclaurin 展開は次のようになる．

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

1 点注意すべきこととして，$I = \mathbf{R}$ としたとき $f(x) = e^x$ は定理 3.14 の条件を満たさない．しかし，任意の正数 R に対して $I = (-R, R)$ とすれば定理 3.14 を適用することができ，任意の $x \in (-R, R)$ に対して上の級数展開が成り立つことが分かる．ところが $R > 0$ は任意であったから，結局，$\mathbf{R}$ の各点で Maclaurin 展開可能であることが従う．

問 3.12 以下で定められる関数 f の Maclaurin 展開を求めよ．

(1) $f(x) = (x+a)^m$ （a は定数，m は自然数）
(2) $f(x) = \log(1+x)$
(3) $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$

Taylor の定理はいろいろな問題に応用される重要な定理であるが，ここではその 1 例として極値問題に応用しよう．高校の時に習ったように，与えられた関数 f の極値を求めるためには，まず $f'(a) = 0$ となる a を求めることにより極値点，すなわち，極値を実現する点の候補を選んだ．次に増減表を作成して，f は a において極大になるか極小になるか，あるいはそのどちらでもないかを判定した．あるいは増減表を作らなくても，$f''(a) > 0$ ならば f は a において極小，$f''(a) < 0$ ならば f は a において極大になることも習ったであろう．ただし，$f''(a) = 0$ の場合は判定不能であったが，次の定理ではこの場合にも極値の判定が行える．

定理 3.15（極値の判定） $f \in C^{n+1}(I)$ および $a \in I$ が

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0, \quad f^{(n+1)}(a) \neq 0$$

を満たしているとする．このとき，

(1) n が偶数ならば，f は a において極大でも極小でもない．
(2) n が奇数であり $f^{(n+1)}(a) > 0$ ならば，f は a において極小になる．
(3) n が奇数であり $f^{(n+1)}(a) < 0$ ならば，f は a において極大になる．

証明 定理 3.13 および仮定より

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1}) \qquad (x \to a)$$

であるから，

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\bigl(f^{(n+1)}(a) + o(1)\bigr) \qquad (x \to a)$$

となる．ここで，$o(1)$ の項は（定義より）$x \to a$ のとき 0 に収束すること，および $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ に注意しよう．したがって，十分小さな $\delta > 0$ を取れば $|x-a| < \delta$ である限り $f^{(n+1)}(a) + o(1)$ の符号は $f^{(n+1)}(a)$ の符号と一致することが分かる．

さて，n が偶数であり $f^{(n+1)}(a) > 0$ の場合を考えよう．このとき，$f(x) - f(a)$ の符号は $(x-a)^{n+1}$ の符号と一致するので，$a - \delta < x < a$ のとき $f(x) < f(a)$，$a < x < a + \delta$ のとき $f(x) > f(a)$ となり，f は a において極大でも極小でもない．同様にして他の場合も確かめられる．(証明終)

次に Taylor の定理を不定形の極限を求める問題に応用してみよう．既に紹介したように，不定形の極限は通常 l'Hôpital の定理（定理 3.9）を用いて計算されるが，次の例でも分かるように Landau の記号を用いた有限 Taylor 展開を使うと非常に見通しよく計算できる場合がある．

例 3.10 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{x - \sin(\sin x)} = 3$

実際，$x \to 0$ のとき

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5) = x + O(x^3) = O(x) \tag{3.7}$$

これと問 3.11 (1) より

$$\sin^3 x = \bigl(x + O(x^3)\bigr)^3 = x^3 + O(x^5)$$

また，$\sin x = o(1)$ $(x \to 0)$ であるから問 3.11 (2) に注意すると (3.7) 式における x に $\sin x$ を代入することができて，

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6}\sin^3 x + O(\sin^5 x) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5) = x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$$

したがって，

$$\frac{\sin^3 x}{x - \sin(\sin x)} = \frac{x^3 + O(x^5)}{\frac{1}{3}x^3 + O(x^5)} = \frac{1 + O(x^2)}{\frac{1}{3} + O(x^2)} \to 3 \qquad (x \to 0)$$

となる．当然のことながら l'Hôpital の定理を使っても計算できるが，その計算は非常に面倒である．実際に l'Hôpital の定理を使って計算してみれば，Landau の記号の便利さが分かるであろう．

例 3.11　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\log(\cos x) + x^2}{x^n}$ が 0 以外の有限な極限値をもつように自然数 n を定め，そのときの極限値を求めてみよう．

$\log(\cos x) = \log\bigl(1 + (\cos x - 1)\bigr)$ および $\cos x - 1 = o(1)$ $(x \to 0)$ に注意すれば，問 3.11 (2) より，$\log(1 + y)$ の展開式

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + O(y^3) \quad (y \to 0)$$

に $y = \cos x - 1$ を代入することができて，$x \to 0$ のとき

$$\log(\cos x) = (\cos x - 1) - \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + O((\cos x - 1)^3)$$

となる．ここで，$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)$ より

$$\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + O(x^6) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + O(x^6)$$

したがって，

$$\frac{2\log(\cos x) + x^2}{x^n} = -\frac{1}{6}x^{4-n} + O(x^{6-n}) \quad (x \to 0)$$

が成り立つ．ゆえに，$n = 4$ のとき，またそのときに限り 0 以外の有限な極限値をもち，その極限値は

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\log(\cos x) + x^2}{x^4} = -\frac{1}{6}$$

となる．

第4章　偏微分法

4.1　2変数関数の極限と連続性

2つの実数の組 (x, y) 全体の集合を $\mathbf{R}^2$ と書く．直感的には，平面上に直交する2本の座標軸を定め，平面上の各点と2つの実数の組 (x, y) とを同一視することにより平面を $\mathbf{R}^2$ と見なしている．この章では，$\mathbf{R}^2$ の部分集合（すなわち平面上の集合）D で定義された関数 $f(x, y)$ に対して前章で紹介した1変数関数の微分法を2変数関数に拡張していく．

まず，開区間や閉区間に対応するような平面上の集合を定義することから始めよう．なお，このような概念を高度に抽象化したものとして，位相（トポロジー）という非常に重要な概念がある．平面上の2点 (x_1, y_1) および (x_2, y_2) の **Euclid（ユークリッド）の距離**は次式で与えれる．

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

また，平面上の点 (a, b) を中心とする半径 r の円の内部の点 (x, y) 全体の集合を $B_r(a, b)$ と書くことにしよう．すなわち，

$$B_r(a, b) := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \|(x, y) - (a, b)\| < r\}$$

定義 4.1　D を $\mathbf{R}^2$ の集合とする．

(1)　D が**開集合**であるとは，任意の D 内の点 (a, b) に対して $B_r(a, b) \subset D$ を満たす正数 r が存在するときをいう．

(2)　D が**閉集合**であるとは，D の補集合 $\mathbf{R}^2 \setminus D$ が開集合であるときをいう．

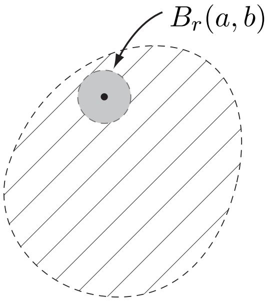
(3)　D が**（弧状）連結**であるとは，D 内の任意の2点が D 内を通る連続曲線で結べるときをいう．より正確には，任意の $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in D$ に対して，次の条件を満たす閉区間 $[0, 1]$ で定義された連続関数 ϕ, ψ が存在するときをいう．

$$\begin{cases} (\phi(0), \psi(0)) = (a_1, b_1), \quad (\phi(1), \psi(1)) = (a_2, b_2) \\ (\phi(t), \psi(t)) \in D \quad (\forall t \in [0, 1]) \end{cases}$$

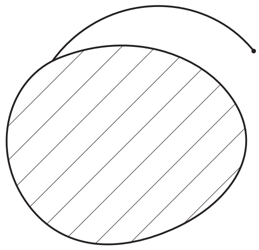
(4)　D が**領域**であるとは，D が連結な開集合であるときをいう．

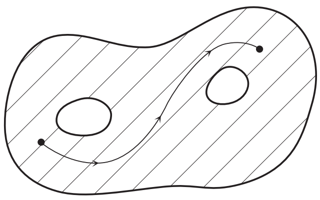
(5)　D が点 (a, b) の**近傍**であるとは，D が点 (a, b) を含む開集合であるときをいう．

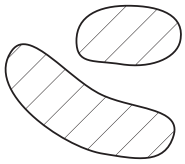
もう少し分かりやすく説明しよう．D が開集合であるとは，D 内の任意の点に対してその点を中心とする十分小さな円の内部が再び D に含まれるときをいい，直感的には2次元的な広がりをもち，なおかつ（1次元の場合の開区間のように）その境界が含まれない集合 D をいう．D が閉集合であるとは，(1次元の場合の閉区間のように）その境界が含まれる集合 D をいう．この場合，集合 D は2次元的な広がりをもつ必要はなく，端点が含まれる曲線もまた閉集合になる．また，D が（弧状）連結であるとは，その名の通り繋がっているような集合 D である．

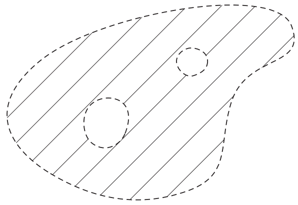


開集合


閉集合


（弧状）連結


連結でない


領域

次に，x および y を変数とする 2 変数関数 $f = f(x, y)$ の連続性を定義しよう．そのためには，1 変数関数のときのように，まず関数の極限を定義しなければならない．

定義 4.2　D を点 (a, b) の近傍，$f = f(x, y)$ を D で定義された 2 変数関数とする．(ただし，$f(a, b)$ は定義されていなくてもよい.）$(x, y) \to (a, b)$ のとき $f(x, y)$ が α に**収束する**とは，任意の正数 ε に対してある正数 δ が存在し，$0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta$ を満たす任意の点 $(x, y) \in D$ に対して $|f(x, y) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つときをいう．このとき

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \alpha \qquad \text{あるいは} \qquad f(x, y) \to \alpha \ \big((x, y) \to (a, b)\big)$$

と書き，α を $(x, y) \to (a, b)$ のときの $f(x, y)$ の**極限値**という．

この定義を論理記号を用いて書くと次のようになる．

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (x, y) \in D\ \big(0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - \alpha| < \varepsilon\big)$$

この定義から分かるように，「$(x, y) \to (a, b)$ のとき」というのは「(x, y) と (a, b) との距離が 0 に近づくとき」すなわち

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \to 0 \quad \text{のとき}$$

ということを意味している．これは x と y が互いに独立に $x \to a$ および $y \to b$ となることと同等である．1 次元の場合には x の a への近づき方は右あるいは左からしかないが，2 次元になると (x, y) の (a, b) への近づき方は右から，左から，上から，下から，斜めから，さらには回転しながらなど様々である．$f(x, y)$ が α に収束するとは，(x, y) が (a, b) にどんな近づき方をしても $f(x, y)$ は必ず一定値 α に近づく，ということを意味している．

例 4.1 (1) $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ とすると，

$$|f(x,y)|=\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}\le|y|\le\|(x,y)\|\to 0 \qquad \bigl((x,y)\to(0,0)\bigr)$$

したがって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$ が成り立つ．

(2) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ とする．(x,y) が x 軸あるいは y 軸に沿って $(0,0)$ に近づくときの極限値は，それぞれ

$$\lim_{x\to 0}f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1 \quad \text{あるいは} \quad \lim_{y\to 0}f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1$$

となり，同じ値ではない．したがって，極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は存在しない．

定義 4.3 D を点 (a,b) の近傍，$f=f(x,y)$ を D で定義された 2 変数関数とする．

(1) f が (a,b) で**連続**であるとは，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=f(a,b)$ が成り立つときをいう．

(2) f が D で**連続**であるとは，f が D の各点 (a,b) で連続であるときをいう．

f が D で連続であることの定義を論理記号を用いて書くと次のようになる．

$$\forall(a,b)\in D\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall(x,y)\in D\ \bigl(\|(x,y)-(a,b)\|<\delta\Rightarrow|f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon\bigr)$$

x の関数 $\phi(x)$ および y の関数 $\psi(y)$ が 1 変数関数として連続であれば，それらを (x,y) の関数と見なすことにより（例えば，$\phi(x)$ は変数 y に関して定数関数と見なすことにより），2 変数関数として（すなわち，上の定義 4.3 の意味で）連続であることは明らかであろう．また，2 変数関数に対しても定理 2.2 と同様な定理が成り立つ．さらに，定理 2.3 に対応するものとして，次の定理が成り立つ．その証明は問として残しておこう．

定理 4.1 $f=f(x,y)$ を $\mathbf{R}^2$ の領域 D で定義された連続関数，$\phi=\phi(t),\psi=\psi(t)$ を区間 I で定義された連続関数で $(\phi(t),\psi(t))\in D$ $(\forall t\in I)$ を満たすものとする．このとき，$F(t):=f(\phi(t),\psi(t))$ で定まる合成関数 F もまた区間 I で連続である．

問 4.1 定理 4.1 を証明せよ．

例 4.2 例 4.1 における極限の計算より，直ちに次のことが分かる．

(1) 次式で定まる関数 f は $\mathbf{R}^2$ で連続である．

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \bigl((x,y)\ne(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

(2) 定数 a の値をどのように選んでも，次式で定まる関数 f は $(0,0)$ で連続でない．

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \bigl((x,y)\ne(0,0)\bigr)\\ a & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$

問 4.2　以下で定められる $\mathbf{R}^2$ 上の関数 f が $(0,0)$ において連続であるかどうかを判定せよ．

(1)　$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \bigl((x,y) \neq (0,0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y) = (0,0)\bigr) \end{cases}$

(2)　$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \bigl((x,y) \neq (0,0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y) = (0,0)\bigr) \end{cases}$

4.2　偏微分と全微分

定義 4.4　D を $\mathbf{R}^2$ の領域，$(a,b) \in D$ および $f = f(x,y)$ を D で定義された 2 変数関数とする．

(1)　f が (a,b) で x または y に関して**偏微分可能**であるとは，それぞれ極限値

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_x(a,b) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f_y(a,b) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

が存在するときをいう．このとき，$f_x(a,b)$ および $f_y(a,b)$ をそれぞれ (a,b) における f の x および y に関する**偏微分係数**という．

(2)　f が D で x または y に関して**偏微分可能**であるとは，それぞれ f が D の各点で x または y に関して偏微分可能であるときをいう．このとき，D の各点 (x,y) を $f_x(x,y)$ または $f_y(x,y)$ に対応させる関数 f_x, f_y が定まるが，これらを f の x または y に関する**偏導関数**という．同様にして，2 階偏導関数

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} f_x, \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} f_x, \quad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} f_y, \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} f_y$$

が定義され，さらには n 階偏導関数も（それらが存在するとき）定義される．

(3)　f が D で $\boldsymbol{n}$ **回連続微分可能**あるいは f が D で $\boldsymbol{C^n}$ **級**であるとは，f の n 階までのすべての偏導関数が存在しかつ連続であるときをいい，D で C^n 級な関数全体の集合を $\boldsymbol{C^n(D)}$ と書く．さらに，f が D で**無限回連続微分可能**あるいは f が D で $\boldsymbol{C^\infty}$ **級**であるとは，f のすべての偏導関数が存在しかつ連続であるときをいい，D で C^∞ 級な関数全体の集合を $\boldsymbol{C^\infty(D)}$ と書く．

この定義から分かるように，偏微分というのは，２つあるうちの１つの変数 x あるいは y に着目して残りの変数は定数と見なし，着目した変数に関する（高校のときに習った）1 変数関数としての微分に他ならない．したがって，x に関する偏導関数を計算する際には，頭の中で y を定数であると思い込み x に関してこれまで通りに微分すればよい．

例 4.3　$f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ とすると，x に関する 1 階および 2 階偏導関数は

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{2x}{x^2+y^2}$$
$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl(\frac{2x}{x^2+y^2}\Bigr) = \frac{2}{x^2+y^2} - \frac{(2x)^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

となる．また，(上と同様に計算してもよいが）x と y の対称性を考慮すれば $f_{yy}(x,y)=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ となることが分かる．したがって，この関数 $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ は

$$f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)=0$$

を満たす．これは **Laplace（ラプラス）方程式**と呼ばれる偏微分方程式で，物理学や工学において現れる重要な方程式である．

問 4.3 以下で定められる 2 変数関数 $f=f(x,y)$ の偏導関数 f_x および f_y を計算せよ．

(1) $f(x,y)=x^y \quad (x>0)$
(2) $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y} \quad (y\neq 0)$
(3) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & \big((x,y)\neq(0,0)\big)\\ 0 & \big((x,y)=(0,0)\big)\end{cases}$

2 階偏導関数 $f_{xy}(x,y)$ および $f_{yx}(x,y)$ が共に存在しても $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ が成り立つとは限らない．すなわち，x で偏微分してから y で偏微分した関数 f_{xy} と，偏微分の順序を入れ替えて，y で偏微分してから x で偏微分した関数 f_{yx} とは一般には一致しないのである．しかしながら次の定理で見るように，それら偏導関数の連続性を仮定すれば偏微分の順序交換が許される．その証明はかなり技巧的であるから，最初は読み飛ばす方が無難であろう．余裕がある諸君はその証明を読んでもよいが，大学の数学に慣れてきてから読み返すことを勧める．

定理 4.2 $f=f(x,y)$ を $\mathbf{R}^2$ の領域 D で定義された関数とする．偏導関数 f_{xy}, f_{yx} が D で存在しかつ (a,b) で連続であれば $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ が成り立つ．

証明 D は開集合であるから，十分小さな $r>0$ を取れば (a,b) を中心とする半径 r の円 $B_r(a,b)$ は再び D に含まれる．そこで，$\sqrt{h^2+k^2}<r$ を満たす任意の実数 h,k に対して，関数 $g=g(h,k)$ を次式で定める．

$$g(h,k):=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)-f(a+h,b)+f(a,b)$$

このとき，$\phi(x):=f(x,b+k)-f(x,b)$ とおき平均値の定理（定理 3.6）を 2 回用いると

$$\begin{aligned}g(h,k)&=\phi(a+h)-\phi(a)=\phi'(a+\theta_1 h)h\\&=\big(f_x(a+\theta_1 h,b+k)-f_x(a+\theta_1 h,b)\big)h\\&=f_{xy}(a+\theta_1 h,b+\theta_2 k)hk\end{aligned}$$

を満たす $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$ が存在する．したがって，f_{xy} の (a,b) における連続性より

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{g(h,k)}{hk}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}f_{xy}(a+\theta_1 h,b+\theta_2 k)=f_{xy}(a,b) \tag{4.1}$$

となる．同様にして，$\psi(y):=f(a+h,y)-f(a,y)$ とおき平均値の定理を 2 回用いると

$$\begin{aligned}g(h,k)&=\psi(b+k)-\psi(b)=\psi'(b+\theta_3 k)k\\&=\big(f_y(a+h,b+\theta_3 k)-f_y(a,b+\theta_3 k)\big)k\\&=f_{yx}(a+\theta_4 h,b+\theta_3 k)hk\end{aligned}$$

を満たす $\theta_3, \theta_4 \in (0,1)$ が存在する．したがって，f_{yx} の (a,b) における連続性より

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(h,k)}{hk} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{yx}(a+\theta_3 h, b+\theta_4 k) = f_{yx}(a,b) \tag{4.2}$$

となる．(4.1) および (4.2) より $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ が従う．(証明終)

この定理を帰納的に用いると，$f = f(x,y)$ が D で C^n 級ならば，f の n 階までのすべての偏導関数に対して，その偏微分の順序を入れ替えてもその値は変わらないことが分かる．例えば，f が C^3 級であれば，その 3 階偏導関数に対して次式が成り立つ．

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}, \qquad f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

このことを考慮して，f が C^n 級であるとき，f を x に関して m 回，y に関して l 回（ただし，$m + l \leq n$）偏微分した偏導関数を次のようにも書く．

$$\frac{\partial^{m+l} f}{\partial x^m \partial y^l}(x,y) \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial^{m+l}}{\partial x^m \partial y^l} f(x,y)$$

ここで，$f_{xy} = f_{yx}$ が成り立たないような例を問の形で紹介しよう．

問 4.4　次式で定められる $\mathbf{R}^2$ 上の関数 $f = f(x,y)$ に対して，$f_{xy}(0,0) = 0$，$f_{yx}(0,0) = 1$ となることを証明せよ．

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \big((x,y) \neq (0,0)\big) \\ 0 & \big((x,y) = (0,0)\big) \end{cases}$$

既に説明したように，偏微分というのは，複数ある変数の中の 1 つの変数に着目し，その変数に関する微分のことであった．その意味では，偏微分とは計算技術に着目した通常の微分の一般化である．一方，1 変数関数 f の微分係数 $f'(a)$ というのは，曲線 $y = f(x)$ のグラフの $(a, f(a))$ における接線の傾きを表していた．したがって，微分可能というのは，その点の近くで曲線 $y = f(x)$ がその接線で近似されることを意味している．

この考え方を 2 変数関数 $f = f(x,y)$ に適用して微分の概念を拡張すると，関数 f が (a,b) で微分可能というのは，3 次元空間内における曲面 $z = f(x,y)$ のグラフがある平面（接平面）で近似されるということになるであろう．このような考え方による 2 変数関数の微分が次に定義する全微分である．

定義 4.5　D を $\mathbf{R}^2$ の領域，$(a,b) \in D$ および $f = f(x,y)$ を D で定義された 2 変数関数とする．

(1)　f が (a,b) で**全微分可能**であるとは，次式を満たす実数 p, q が存在するときをいう．

$$f(x,y) - f(a,b) = p(x-a) + q(y-b) + o(\|(x,y)-(a,b)\|) \quad \big((x,y) \to (a,b)\big)$$

すなわち

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - p(x-a) - q(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

(2)　f が D で**全微分可能**であるとは，f が D の各点で全微分可能であるときをいう．

この全微分は偏微分よりも強い性質であり，次の定理で見るように全微分可能であれば偏微分可能であることがいえる．

定理 4.3　f が (a,b) で全微分可能であれば，偏微分可能でもあり，$p = f_x(a,b)$ および $q = f_y(a,b)$ が成り立つ．

証明　仮定より $f(a+h,b) - f(a,b) = ph + o(h)$ $(h \to 0)$ であるから，

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = p + \frac{o(h)}{h} \to p \qquad (h \to 0)$$

となる．したがって，f は (a,b) で x に関して偏微分可能であり $f_x(a,b) = p$ が成り立つ．y に関しても同様である．(証明終)

この定理 4.3 より，2 変数関数 f が (a,b) で全微分可能であるとき，3 次元空間内の曲面 $z = f(x,y)$ のグラフの $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式は

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

となることが分かる．

この定理 4.3 の逆は一般に成り立たない．すなわち，偏微分可能であっても全微分可能でないような関数が存在する．しかしながら，偏導関数の連続性を仮定すれば全微分可能性が従うことが次の定理から分かる．この定理の証明も，最初は読み飛ばして構わない．

定理 4.4　$f = f(x,y)$ が $\mathbf{R}^2$ の領域 D で C^1 級であれば，f は D で全微分可能である．

証明　$(a,b) \in D$ を任意に固定する．D は開集合であるから，十分小さな $r > 0$ を取れば (a,b) を中心とする半径 r の円 $B_r(a,b)$ は再び D に含まれる．そこで，$\sqrt{h^2+k^2} < r$ を満たす任意の実数 h, k に対して，$f(a+h,b+k) - f(a,b)$ を

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \big(f(a+h,b+k) - f(a,b+k)\big) + \big(f(a,b+k) - f(a,b)\big)$$

と書き直そう．これを考慮して，関数 ϕ, ψ を次式で定義する．

$$\phi(t) := f(a+th, b+k), \qquad \psi(t) := f(a, b+tk)$$

このとき，ϕ, ψ は閉区間 $[0,1]$ で連続，開区間 $(0,1)$ で微分可能である．ゆえに，平均値の定理より次式を満たす $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ が存在する．

$$\begin{aligned}
&f(a+h,b+k) - f(a,b+k) = \phi(1) - \phi(0) = \phi'(\theta_1) = hf_x(a+\theta_1 h, b+k) \\
&f(a,b+k) - f(a,b) = \psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta_2) = kf_y(a, b+\theta_2 k)
\end{aligned}$$

したがって，f_x, f_y の連続性より

$$\begin{aligned}
&\frac{|f(a+h,b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \frac{\big|h\big(f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a,b)\big) + k\big(f_y(a, b+\theta_2 k) - f_y(a,b)\big)\big|}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&\le \big|f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a,b)\big| + \big|f_y(a, b+\theta_2 k) - f_y(a,b)\big| \\
&\to 0 \qquad \big((h,k) \to (0,0)\big)
\end{aligned}$$

となる．これは f が (a,b) で全微分可能であることを示している．(証明終)

4.3 合成関数の微分法

定理 4.5（合成関数の微分法）　$f = f(x,y)$ は $\mathbf{R}^2$ の領域 D で全微分可能，$\phi = \phi(t), \psi = \psi(t)$ は開区間 I で微分可能であり $(\phi(t), \psi(t)) \in D$ $(\forall t \in I)$ を満たすとする．このとき，合成関数 $F(t) := f(\phi(t), \psi(t))$ もまた I で微分可能であり次式が成り立つ．

$$F'(t) = f_x(\phi(t), \psi(t))\phi'(t) + f_y(\phi(t), \psi(t))\psi'(t)$$

証明 $t_0 \in I$ を任意に固定し，$(x_0, y_0) := \bigl(\phi(t_0), \psi(t_0)\bigr) \in D$ とおく．さらに，D 上の関数 $g = g(x,y)$ を次式で定める．

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} & \bigl((x,y) \neq (x_0,x_0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y) = (x_0,x_0)\bigr) \end{cases}$$

このとき，f の (x_0, y_0) における全微分可能性より

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0 = g(x_0,y_0)$$

となり，g は D で連続であることが分かる．また，任意の $(x,y) \in D$ に対して

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\,g(x,y)$$

が成り立つことに注意しよう．この式に $(x,y) = (\phi(t), \psi(t))$ を代入し，両辺を $t - t_0$ で割ると

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = f_x(x_0,y_0)\frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} + f_y(x_0,y_0)\frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} + G(t) \tag{4.3}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} |G(t)| &= \left| \frac{\sqrt{(\phi(t) - \phi(t_0))^2 + (\psi(t) - \psi(t_0))^2}\,g(\phi(t), \psi(t))}{t - t_0} \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0}\right)^2 + \left(\frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0}\right)^2}\,|g(\phi(t), \psi(t))| \\ &\to \sqrt{(\phi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2}\,g(x_0,y_0) = 0 \qquad (t \to t_0) \end{aligned}$$

したがって，(4.3) 式において $t \to t_0$ とすれば $F'(t_0) = f_x(x_0,y_0)\phi'(t_0) + f_y(x_0,y_0)\psi'(t_0)$ となり望みの式が従う．(証明終)

この合成関数の微分法の公式は，$f(x,y)$ および $x = \phi(t), y = \psi(t)$ の合成関数であることに注意して，次の形に書いておくと覚えやすいであろう．

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

問 4.5　$f = f(x,y)$ は $\mathbf{R}^2$ で C^2 級，$\phi = \phi(t), \psi = \psi(t)$ は $\mathbf{R}$ で C^2 級であるとする．このとき，合成関数 $F(t) := f(\phi(t), \psi(t))$ の 2 階導関数 $F''(t)$ を f, ϕ, ψ およびそれらの（偏）導関数を用いて書き表せ．

定理 4.6 (合成関数の微分法)　D, Ω は $\mathbf{R}^2$ の領域，$f = f(x, y)$ は D で全微分可能，$\phi = \phi(u, v), \psi = \psi(u, v)$ は Ω で偏微分可能であり $(\phi(u, v), \psi(u, v)) \in D$ $\big(\forall(u, v) \in \Omega\big)$ を満たすとする．このとき，合成関数 $F(u, v) := f(\phi(u, v), \psi(u, v))$ もまた Ω で偏微分可能であり次式が成り立つ．

$$\begin{cases} F_u(u, v) = f_x(\phi(u, v), \psi(u, v))\phi_u(u, v) + f_y(\phi(u, v), \psi(u, v))\psi_u(u, v) \\ F_v(u, v) = f_x(\phi(u, v), \psi(u, v))\phi_v(u, v) + f_y(\phi(u, v), \psi(u, v))\psi_v(u, v) \end{cases} \tag{4.4}$$

証明　変数 v（あるいは u）を定数と見なし，$u = t$（あるいは $v = t$）として定理 4.5 を適用すればよい．(証明終)

この合成関数の微分法の公式は，$f(x, y)$ および $x = \phi(u, v), y = \psi(u, v)$ の合成関数であることに注意して，次の形に書いておくと覚えやすいであろう．

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \tag{4.5}$$

高校では，２つの関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ の合成関数 $y = f(g(x))$ の微分法を

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

という形で覚えたことであろう．du を数だと思って上式の右辺における du を約分すれば左辺が得られる．du はあくまで記号であって数ではないが，数のように扱って正しい公式が成り立つのであるから非常に便利な記号である．そのことが頭にあるのか，(4.5) 式の右辺における記号 ∂x および ∂y を数だと思って約分してしまい，$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}$ あるいは $\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}$ と計算してしまう人をたまに見かけるが，これは誤りである！∂x や ∂y はあくまで記号であって数ではなく，一般には

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} \neq \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \neq \frac{\partial f}{\partial u}$$

であることに注意しよう．同様に，高校では関数 $y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ の微分法を

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \tag{4.6}$$

という形で覚えたことであろう．この類推を偏微分に対して行ってはならない．一般には

$$\frac{\partial x}{\partial u} \neq \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} \neq \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

である．この 2 変数関数に対する合成関数の微分法は鬼門であり，上のような間違いをしてしまう人が少なくない．この部分はしっかりと押さえておこう．

それでは，$\frac{\partial x}{\partial u}$ および $\frac{\partial u}{\partial x}$ の関係はどうなっているのか？という疑問をもつ諸君もいるであろう．その答えは次のようにして与えられる．(4.5) 式において $f = u, v$ とおこう．(厳密に言えば，$F(u, v) = u, v$ となっている場合を考えるのである．) このとき，４つの等式が得られるが，それを行列の形で書くと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1}$$

となる．これが 1 変数関数に対する公式 (4.6) の 2 変数関数の場合への拡張である．

(4.4) 式を（簡単のために変数を省略して）行列の形で書くと次のようになる.

$$\begin{pmatrix} F_u \\ F_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_u & \psi_u \\ \phi_v & \psi_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

この式は，xy 座標系および uv 座標系との関係が $x = \phi(u,v), y = \psi(u,v)$ で与えられているとき，関数 f の xy 座標系における偏導関数 f_x, f_y と uv 座標系における偏導関数 F_u, F_v との関係式を与えていると見なすことができる.

例 4.4（極座標変換）　$f = f(x,y)$ を $\mathbf{R}^2$ で全微分可能な関数，(r,θ) を極座標系すなわち $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とし，関数 f を極座標系で表したものを $F(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とする．このとき，定理 4.6 より次式が成り立つ.

$$\begin{cases} F_r(r,\theta) = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\sin\theta \\ F_\theta(r,\theta) = -f_x(x,y) r\sin\theta + f_y(x,y) r\cos\theta \end{cases}$$

これは直交座標系 (x,y) に関する偏微分と極座標系 (r,θ) に関する偏微分との関係を表しており，これを用いれば直交座標系における偏微分方程式を極座標系における偏微分方程式に書き直すことができる．実際，上式を f_x および f_y について解くと

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} F(r,\theta) - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} F(r,\theta) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} F(r,\theta) + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} F(r,\theta) \end{cases}$$

となる．これより，形式的には次のように書ける.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

この関係を用いると，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

が成り立つことが分かり，直交座標系 (x,y) における Laplace 方程式を極座標系 (r,θ) に関する偏微分方程式に書き直せる.

問 4.6　θ を定数，f を $\mathbf{R}^2$ で定義された C^2 級関数とし，$f = f(x,y)$ と $x = u\cos\theta - v\sin\theta$, $y = u\sin\theta + v\cos\theta$ との合成関数を $F(u,v) := f(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta)$ $\big(= f(x,y)\big)$ とする．このとき，次式が成り立つことを示せ.

(1)　$(F_u(u,v))^2 + (F_v(u,v))^2 = (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2$

(2)　$F_{uu}(u,v) + F_{vv}(u,v) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$

4.4　2 変数関数の Taylor 展開と極値問題

定義 4.6　$f = f(x,y)$ を $\mathbf{R}^2$ の領域 D で定義された関数，h, k を実数とする．このとき，

$$\begin{aligned} &\big(h\tfrac{\partial}{\partial x} + k\tfrac{\partial}{\partial y}\big) f(x,y) := h f_x(x,y) + k f_y(x,y) \\ &\big(h\tfrac{\partial}{\partial x} + k\tfrac{\partial}{\partial y}\big)^{n+1} f(x,y) := \big(h\tfrac{\partial}{\partial x} + k\tfrac{\partial}{\partial y}\big)\Big(\big(h\tfrac{\partial}{\partial x} + k\tfrac{\partial}{\partial y}\big)^n f(x,y)\Big) \end{aligned}$$

により帰納的に記号 $\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)^n$ を定める．ただし，$\big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\big)^0 f = f$ とする．この記号は関数を関数に写す写像であり**偏微分作用素**という.

例えば，$f \in C^\infty(D)$ に対して

$$\big(h\tfrac{\partial}{\partial x} + k\tfrac{\partial}{\partial y}\big)^2 f = h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}$$
$$\big(h\tfrac{\partial}{\partial x} + k\tfrac{\partial}{\partial y}\big)^3 f = h^3 f_{xxx} + 3h^2 k f_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy}$$

となる．一般には，次式が成り立つ．

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} h^j k^{n-j} \frac{\partial^n f}{\partial x^j \partial y^{n-j}}$$

定理 4.7（Taylor の定理）　$f = f(x, y)$ は $\mathbf{R}^2$ の領域 D で C^n 級，$(a, b) \in D$，h, k は実数で (a, b) および $(a+h, b+k)$ を結ぶ線分 $\{(a+th, a+tk) \,|\, 0 \le t \le 1\}$ が D に含まれるものとする．このとき，次式を満たす $\theta \in (0, 1)$ が存在する．

$$f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a, b) + \frac{1}{n!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h, b+\theta k)$$

証明　$\phi(t) := f(a+th, b+tk)$ とおくと，関数 ϕ は閉区間 $[0, 1]$ を含む開区間で C^n 級である．したがって，1 変数関数に対する Taylor の定理（定理 3.11）より

$$\phi(1) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \phi^{(j)}(0) + \frac{1}{n!} \phi^{(n)}(\theta) \tag{4.7}$$

を満たす $\theta \in (0, 1)$ が存在する．ここで，合成関数の微分法（定理 4.5）より

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= f_x(a+th, b+tk)\frac{d}{dt}(a+th) + f_y(a+th, b+tk)\frac{d}{dt}(b+tk) \\ &= f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k \\ &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a+th, b+tk)\end{aligned}$$

さらに，帰納的に次式が示される．

$$\phi^{(j)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a+th, b+tk)$$

これを (4.7) 式に代入すれば望みの展開式が従う．（証明終）

次に，この Taylor の定理を 2 変数関数に対する極値問題に応用しよう．

定義 4.7　D を $\mathbf{R}^2$ の領域，$(a, b) \in D$ および $f = f(x, y)$ を D で定義された 2 変数関数とする．

(1)　f が (a, b) において**極大**（または**狭義の極大**）になるとは，ある正数 r が存在して任意の $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ に対して次式が成り立つときをいう．

$$0 < \|(x, y) - (a, b)\| < r \quad \Rightarrow \quad f(x, y) \le f(a, b) \quad \big(\text{または } f(x, y) < f(a, b)\big)$$

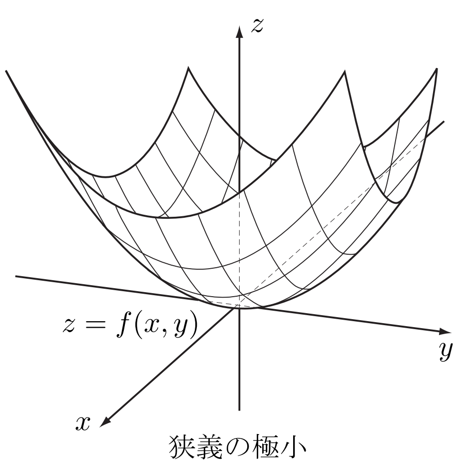
このとき，$f(a, b)$ を**極大値**，(a, b) を**極大点**という．

(2)　f が (a, b) において**極小**（または**狭義の極小**）になるとは，ある正数 r が存在して任意の $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ に対して次式が成り立つときをいう．

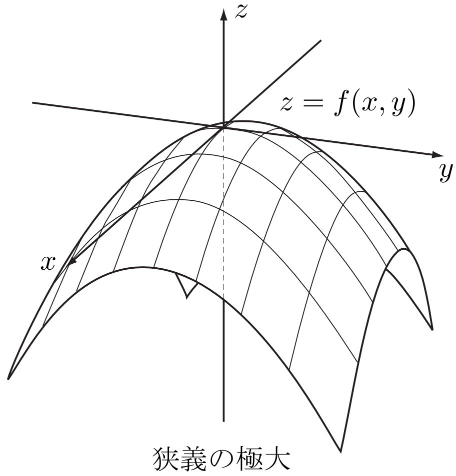
$$0 < \|(x, y) - (a, b)\| < r \quad \Rightarrow \quad f(x, y) \ge f(a, b) \quad \big(\text{または } f(x, y) > f(a, b)\big)$$

このとき，$f(a, b)$ を**極小値**，(a, b) を**極小点**という．

(3)　極大値と極小値をまとめて**極値**，極大点と極小点をまとめて**極値点**という．



狭義の極小



狭義の極大

1変数関数 $f = f(x)$ の極値問題では，まず $f'(a) = 0$ となる a を求めることにより極値点の候補を求めた．次の定理から分かるように，2変数関数の極値問題でも同様にして極値点の候補を求める．

定理 4.8　D を $\mathbf{R}^2$ の領域，$(a, b) \in D$ および $f = f(x, y)$ を D で定義された2変数関数とする．f が (a, b) で偏微分可能でありかつ (a, b) で極値をとれば，$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ が成り立つ．

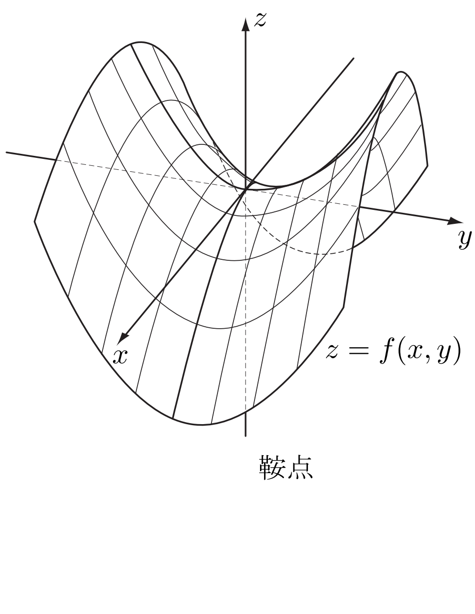
証明　x の関数 $\phi(x) := f(x, b)$ は $x = a$ で微分可能でありかつ $x = a$ で極値をとる．したがって，$\phi'(a) = f_x(a, b) = 0$ が成り立つ．同様に，y の関数 $\psi(y) := f(a, y)$ は $y = b$ で微分可能でありかつ $y = b$ で極値をとる．したがって，$\psi'(b) = f_y(a, b) = 0$ が成り立つ．(証明終)

$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ が成り立っていても f が (a, b) で極値をとるとは限らないことは1変数関数のときと同様である．ただし，2変数関数の場合には1変数関数のときには見られなかった理由によりこのようなことが起こり得る．

例えば，$f(x, y) = y^2 - x^2$ という関数を考えてみよう．$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ を解くと $(x, y) = (0, 0)$ となるが，

$$x \text{ の関数 } f(x, 0) = -x^2 \text{ は } x = 0 \text{ で極大}$$
$$y \text{ の関数 } f(0, y) = y^2 \text{ は } y = 0 \text{ で極小}$$

となる．したがって，f は $(0, 0)$ で極大にも極小にもならない．この例のように，ある方向から見ると極大になっており，別の方向から見ると極小になっているような点を**鞍点**あるいは**峠点**という．



鞍点

定義 4.8　D を $\mathbf{R}^2$ の領域，$(a,b) \in D$ および $f = f(x,y)$ を D で定義された 2 変数関数とする．(a,b) が f の**停留点**あるいは**臨界点**であるとは，$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ が成り立つときをいう．

上で見てきたように，極値点であれば停留点であるが，その逆は一般には成り立たない．停留点が極大点であるか極小点であるかを判定するためには，1 変数関数のときと同様に，2 階偏導関数の様子を調べればよい．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 4.9（極値の判定）　D を $\mathbf{R}^2$ の領域，$(a,b) \in D$，$f \in C^2(D)$ は $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ を満たすとし，D で定義された関数 $d = d(x,y)$ を次式で定める．

$$d(x,y) := f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \bigl(f_{xy}(x,y)\bigr)^2 = \det\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

(1)　$d(a,b) > 0$ の場合

　(i)　$f_{xx}(a,b) > 0$ ならば，f は (a,b) で極小となる．

　(ii)　$f_{xx}(a,b) < 0$ ならば，f は (a,b) で極大となる．

(2)　$d(a,b) < 0$ の場合，f は (a,b) で極値をとらない（(a,b) は f の峠点である）．

証明　(1)　D は開集合であるから，十分小さな $r > 0$ を取れば (a,b) を中心とする半径 r の円 $B_r(a,b)$ は再び D に含まれる．そこで，$\sqrt{h^2+k^2} < r$ を満たす任意の実数 h,k に対して，Taylor の定理（定理 4.7）より

$$\begin{aligned} &f(a+h,b+k) - f(a,b) \\ &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\ &\quad + \frac{1}{2}\bigl\{h^2 f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) + 2hk f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) + k^2 f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k)\bigr\} \end{aligned}$$

となる $\theta \in (0,1)$ が存在する．そこで

$$A := f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k), \quad B := f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k), \quad C := f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k)$$

とおくと，仮定より次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) - f(a,b) &= \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) \\ &= \frac{1}{2A}\bigl\{(Ah+Bk)^2 + (AC-B^2)k^2\bigr\} \end{aligned}$$

ここで，$AC - B^2 = d(a+\theta h, b+\theta k)$ に注意すると，$d(a,b) \neq 0$，$f_{xx}(a,b) \neq 0$ でありかつ h,k が十分小さければ，$AC-B^2$ の符号は $d(a,b)$ の符号と一致し，A の符号は $f_{xx}(a,b)$ の符号と一致する．このことと上式より (1) の結論が従う．

(2)　前半の計算より，特に

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}(A_0h^2 + 2B_0hk + C_0k^2) + o(h^2+k^2) \quad \bigl((h,k) \to (0,0)\bigr)$$

が成り立つ．ただし，$A_0 = f_{xx}(a,b), B_0 = f_{xy}(a,b), C_0 = f_{yy}(a,b)$ である．仮定より $A_0C_0 - B_0^2 < 0$ であるから，$A_0 > 0$ とすると，直線 $y = b$ 上での関数 f の値

$$f(a+h,b) = f(a,b) + \frac{1}{2}A_0h^2 + o(h^2)$$

は $h=0$ で（すなわち (a,b) で）極小となり，直線 $A_0(x-a)+B_0(y-b)=0$ 上での関数 f の値

$$f(a+B_0h, b-A_0h) = f(a,b) - \frac{1}{2}A_0(B_0^2 - A_0C_0)h^2 + o(h^2)$$

は $h=0$ で（すなわち (a,b) で）極大となるので，(a,b) は f の鞍点である．$A_0 \leq 0$ の場合も同様にして示される．(証明終)

1 変数関数の場合，定理 3.15 において見たように，f の停留点 a が $f''(a)=0$ を満たしているとき，極値の判定を行うためにはより高階の微分係数の値を用いる必要があった．2 変数関数の場合も同様で，$d(a,b)=0$ の場合には f の 2 階偏導関数の値だけでは f が極大になるか極小になるか，それとも極値をとらないかは判定できない．その判定を行うためには，より高階の偏導関数の情報を用いなければならない．

例 4.5　$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ の極大値と極小値を求めてみよう．まず f の停留点を求めていく．

$$f_x(x,y) = 3(x^2-y), \qquad f_y(x,y) = 3(y^2-x)$$

より，$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を解くと $(x,y)=(0,0),(1,1)$ となる．これが f の停留点である．次に，定理 4.9 を用いて，これらの点が極値点であるかどうかを判定する．

$$d(x,y) = \det\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} = 9(4xy-1)$$

より

$$d(1,1) = 27 > 0, \quad f_{xx}(1,1) = 6 > 0 \qquad \therefore \quad f \text{ は } (1,1) \text{ で極小値 } -1 \text{ をとる}$$

また，

$$d(0,0) = -9 < 0 \qquad \therefore \quad f \text{ は } (0,0) \text{ で極値をとらない（鞍点となる）}$$

実際，直線 $y=-x$ 上での f の値 $f(x,-x)=3x^2$ は $x=0$ で極小となり，直線 $y=x$ 上での f の値 $f(x,x)=-3x^2\left(1-\frac{2}{3}x\right)$ は $x=0$ で極大となる．

問 4.7　以下で定められる関数 f の停留点をすべて求めよ．次にその中から極値点を選び出し，極小・極大の判定をせよ．

(1)　$f(x,y) = (x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$

(2)　$f(x,y) = x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

第II部

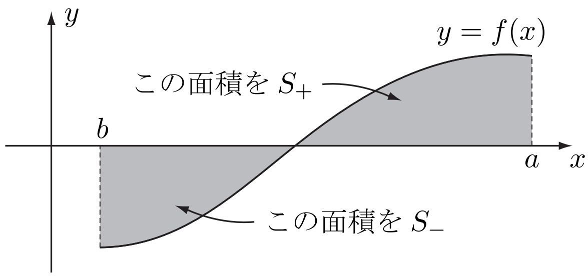
数学Ｂ３

第 5 章　積分法

5.1　Riemann 和と Riemann 積分

積分とは何か？高校では

- まず微分の逆演算として不定積分を定義
- それから不定積分を用いて定積分を定義
- 関数 $f(x)$ の定積分は曲線 $y = f(x)$ と x 軸とに囲まれた部分の（符号付き）面積に等しい



$$\int_a^b f(x)dx = S_+ - S_-$$

と習ったことであろう．さらに，定積分と区分求積法の関係も学んできた．しかし，歴史的に見ると積分は図形の面積や体積を微小部分の集まりとして計算する求積法に起源をもち，紀元前から存在している．それに対して，微分は Leibniz や Newton によって 17 世紀に発見された比較的新しい概念である．それらが逆演算であることが発見されて以来，多くの図形に対して面積や体積を求めることが可能になった．19 世紀になると Fourier（フーリエ）級数の収束の研究を通して積分とは何であるかを真剣に考える必要が生じ，Riemann（リーマン）によって初めてその厳密な定義が与えられた．この章では，その Riemann による積分を学んでいく．

定義 5.1　f を閉区間 $I = [a, b]$ で定義された関数とする．

(1)　区間 I の**分割** $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ に対して，

$$\Delta_j := [x_{j-1}, x_j] \qquad (1 \leq j \leq n)$$

を分割 Δ の**小区間**，

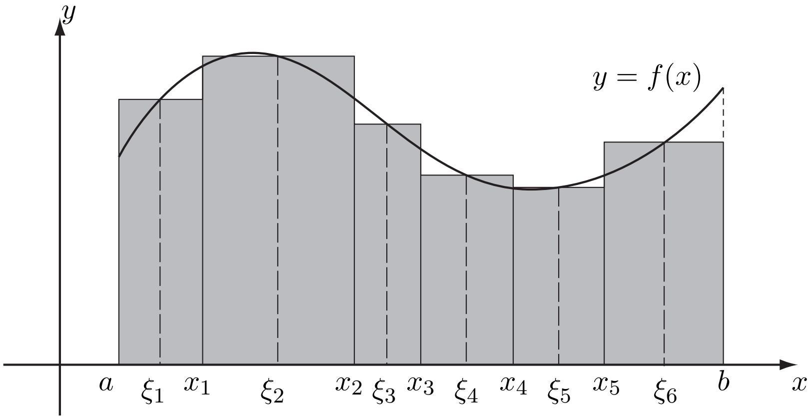
$$|\Delta| := \max\{x_j - x_{j-1} \,|\, 1 \leq j \leq n\}$$

を分割 Δ の**幅**という．また，各点 x_j $(0 \leq j \leq n)$ を分割 Δ の**分点**という．

(2)　$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ $(\xi_j \in \Delta_j,\ 1 \leq j \leq n)$ に対して

$$S(f, \Delta, \xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

とおく．これを f の **Riemann 和**という．このとき，ξ_j を小区間 Δ_j の**代表元**という．



f の Riemann 和

(3) f が I で **Riemann 可積分**あるいは単に**可積分**であるとは，$|\Delta| \to 0$ のとき f の Riemann 和 $S(f,\Delta,\xi)$ が分割 Δ および代表元の集合 ξ に無関係な数 $S(f)$ に収束するときをいう．このとき，

$$S(f) = \int_a^b f(x)dx$$

と書き，これを f の I での **Riemann 積分**あるいは単に**積分**という．

区間 I の分割 Δ 全体の集合を $\mathfrak{D}$，代表元からなる ξ 全体の集合を $\mathfrak{X}_\Delta$ と書くことにしよう．このとき，f が I で可積分であることを論理記号を用いて書くと次のようになる．

$$\exists S(f) \in \mathbf{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \Delta \in \mathfrak{D}\ \forall \xi \in \mathfrak{X}_\Delta\ (|\Delta| < \delta \Rightarrow |S(f,\Delta,\xi) - S(f)| < \varepsilon)$$

かなり複雑な命題であるが，余裕のある諸君はこれが何を意味しており，論理記号を用いずに可積分性を定義した文章と何がどう対応しているかを考えてみて欲しい．

この定義から分かるように，Riemann 積分は曲線 $y=f(x)$ と x 軸に囲まれた部分を縦に細長く細分し，その個々の細長い部分を長方形で近似することによってその部分の面積を求めている．細長い微小部分を長方形で近似する際，その高さとして代表元 ξ_j における関数 f の値 $f(\xi_j)$ を用いて Riemann 和を計算しており，それによる不定性がある．しかし，分割をどんどん細かくしていけば，その不定性による誤差はどんどん小さくなり，最終的にその誤差は 0 に収束すると期待するのは自然であろう．むしろ，そうならないような性質の悪い関数に対しては，きっとその面積自体も決まらないから積分も定義していないのである．

なお，f が I で可積分であれば，区間 I の分割として n 等分割（すなわち，$x_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$）を取り，代表元 ξ として $\xi_j = x_j$ $(1 \le j \le n)$ を取ることにより，高校のときに習った区分求積法

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(a + \frac{j}{n}(b-a))$$

が成り立つことが分かる．

高校のときには「どのような関数に対して積分が定義できるか？」ということは余り気にしなかったであろう．そもそも高校の授業で現れてくる関数は積分できるものばかりであった．しかし，次の例から分かるように，積分が存在しない関数も存在するのである．

例 5.1 Dirichlet（ディリクレ）の関数と呼ばれている関数 f を次式で定める．

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

このとき，任意の閉区間 $I = [a, b]$ および分割 Δ に対して

$$\begin{aligned} &\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \text{ はすべて有理数} \quad \Rightarrow \quad S(f, \Delta, \xi) = b - a \\ &\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \text{ はすべて無理数} \quad \Rightarrow \quad S(f, \Delta, \xi) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．ところが有理数全体の集合 $\mathbf{Q}$ は実数全体の集合において稠密であるから（付録の定理 A.2 を参照せよ），任意の区間 I の分割 Δ に対して，その分割の幅 $|\Delta|$ がどんなに小さくても，すべての代表元 ξ_j が有理数であるような ξ，およびすべての代表元 ξ_j が無理数であるような ξ を取ることができる．それゆえ，$|\Delta| \to 0$ のとき Riemann 和 $S(f, \Delta, \xi)$ は収束しない．したがって，Dirichlet の関数 f は任意の閉区間 I で可積分ではない．

この例より，積分ができる関数とできない関数があることが分かった．このことから，どのような関数に対して積分が定義できるのか？可積分となるための条件は何か？ということが問題になる．以下でそれを考えていこう．

f を閉区間 $I = [a, b]$ で定義された有界な関数とする．そして，その下限および上限をそれぞれ m および M とする．

$$m := \inf_{x \in I} f(x) \ \bigl(= \inf\{f(x) \,|\, x \in I\}\bigr), \qquad M := \sup_{x \in I} f(x) \ \bigl(= \sup\{f(x) \,|\, x \in I\}\bigr)$$

区間 I の任意の分割 Δ に対して，その各小区間 Δ_j における f の下限および上限をそれぞれ m_j および M_j とする．

$$m_j := \inf_{x \in \Delta_j} f(x), \qquad M_j := \sup_{x \in \Delta_j} f(x)$$

このとき明らかに次の不等式が成り立つ．

$$m \leq m_j \leq f(x) \leq M_j \leq M \qquad (x \in \Delta_j) \tag{5.1}$$

さらに，

$$\underline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j - x_{j-1}), \qquad \overline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{n} M_j (x_j - x_{j-1})$$

とおこう．このとき，次式が成り立つことは容易に確かめられるであろう．

$$\underline{S}_\Delta(f) = \inf\{S(f, \Delta, \xi) \,|\, \xi \in \mathfrak{X}_\Delta\}, \qquad \overline{S}_\Delta(f) = \sup\{S(f, \Delta, \xi) \,|\, \xi \in \mathfrak{X}_\Delta\} \tag{5.2}$$

(5.1) 式の辺々に $x_j - x_{j-1} > 0$ を掛け，x に代表元 $\xi_j \in \Delta_j$ を代入し，それから j についての和をとれば次式が成り立つ．

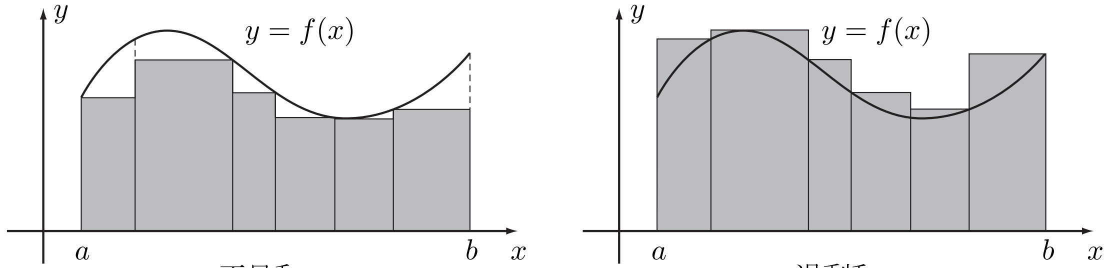
$$m(b - a) \leq \underline{S}_\Delta(f) \leq S(f, \Delta, \xi) \leq \overline{S}_\Delta(f) \leq M(b - a) \tag{5.3}$$

これは集合 $\{\underline{S}_\Delta(f) \,|\, \Delta \in \mathfrak{D}\}$ および $\{\overline{S}_\Delta(f) \,|\, \Delta \in \mathfrak{D}\}$ が有界な実数の集合であることを示している．したがって，実数の連続性公理よりそれらの集合の下限および上限

$$\underline{S}(f) := \sup\{\underline{S}_\Delta(f) \,|\, \Delta \in \mathfrak{D}\}, \qquad \overline{S}(f) := \inf\{\overline{S}_\Delta(f) \,|\, \Delta \in \mathfrak{D}\}$$

が存在する．

定義 5.2　$\underline{S}_\Delta(f)$ および $\overline{S}_\Delta(f)$ を，それぞれ分割 Δ に関する関数 f の**不足和**および**過剰和**という．また，$\underline{S}(f)$ および $\overline{S}(f)$ を，それぞれ関数 f の区間 I における**下積分**および**上積分**という．

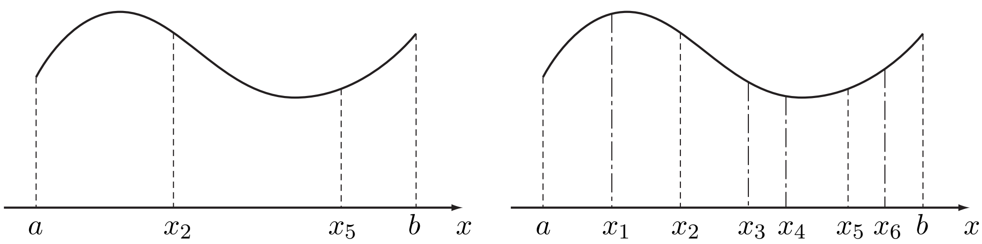


不足和　　過剰和

曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分を縦に細長く細分し，その細長い部分を長方形で近似する際，Riemann 和では代表元 ξ_j における関数 f の値 $f(\xi_j)$ をその高さとして用いていた．その代わりに f の値の下限あるいは上限を用いて近似したものが，それぞれ不足和あるいは過剰和である．上図を見ればそれらが相応しい呼び方であることが理解できるであろう．さて，分割をどんどん細かくしていけば，不足和の値は次第に大きくなり，また過剰和の値は次第に小さくなって，どちらも近似の精度が上がってくるであろう．そして，その不足和の上限である下積分および過剰和の下限である上積分は共にその部分の面積に等しくなるに違いないと期待するのは自然であろう．むしろ，それらが一致しない方が奇妙な状況になっていると思える．実際，次節で紹介するように，f が可積分であるための必要十分条件は上積分と下積分が一致することである．この後者の条件は Darboux（ダルブー）の可積分条件と呼ばれている．

5.2　Darboux の定理

定義 5.3　区間 I の 2 つの分割 Δ および Δ' に対して，Δ' が Δ の**細分**であるとは，Δ の分点全体の集合が Δ' の分点全体の集合に含まれるときをいう．このとき，$\Delta \preceq \Delta'$ と書くことにする．



分割 Δ　　分割 Δ'

補題 5.1　(1)　$\Delta \preceq \Delta'$ ならば，$\underline{S}_\Delta(f) \leq \underline{S}_{\Delta'}(f) \leq \overline{S}_{\Delta'}(f) \leq \overline{S}_\Delta(f)$

(2)　区間 I の任意の分割 Δ_1, Δ_2 に対して，$\underline{S}_{\Delta_1}(f) \leq \overline{S}_{\Delta_2}(f)$

(3)　$\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$

証明　(1)　分割 Δ' が分割 Δ に 1 つの分点を加えることによって得られる場合，すなわち

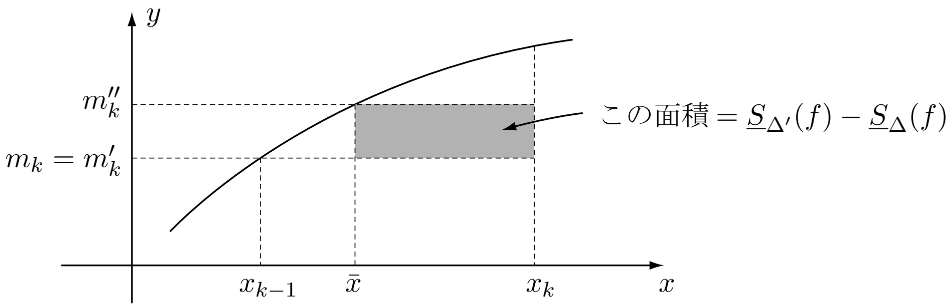
$$\begin{array}{lcl} \Delta & : & a = x_0 < x_1 < \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots < x_n = b \\ \Delta' & : & a = x_0 < \cdots < x_{k-1} < \bar{x} < x_k < \cdots < x_n = b \end{array}$$

の場合を示せば，帰納法によって一般の場合も示される．そこで以下では，Δ, Δ' が上の形であると仮定しよう．

$$\begin{array}{lll} \Delta_j := [x_{j-1}, x_j] \quad (1 \le j \le n), & \Delta'_k := [x_{k-1}, \bar{x}], & \Delta''_k := [\bar{x}, x_k] \\ m_j := \inf_{x \in \Delta_j} f(x) \quad (1 \le j \le n), & m'_k := \inf_{x \in \Delta'_k} f(x), & m''_k := \inf_{x \in \Delta''_k} f(x) \end{array}$$

とおくと，$m_k \le m'_k, m''_k$ であり次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \underline{S}_{\Delta}(f) &= \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j - x_{j-1}) \\ \underline{S}_{\Delta'}(f) &= \sum_{j \ne k} m_j (x_j - x_{j-1}) + m'_k(\bar{x} - x_{k-1}) + m''_k(x_k - \bar{x}) \end{aligned}$$



したがって

$$\begin{aligned} \underline{S}_{\Delta'}(f) - \underline{S}_{\Delta}(f) &= m'_k(\bar{x} - x_{k-1}) + m''_k(x_k - \bar{x}) - m_k(x_k - x_{k-1}) \\ &= (m'_k - m_k)(\bar{x} - x_{k-1}) + (m''_k - m_k)(x_k - \bar{x}) \ge 0 \end{aligned}$$

となり，$\underline{S}_{\Delta}(f) \le \underline{S}_{\Delta'}(f)$ が従う．同様にして，$\overline{S}_{\Delta'}(f) \le \overline{S}_{\Delta}(f)$ も示される．

(2)　任意の分割 Δ_1, Δ_2 に対して，それらの分点を合わせて得られる分割を Δ とすると，$\Delta_1 \preceq \Delta$ および $\Delta_2 \preceq \Delta$ が成り立つ．したがって，(1) の結果より

$$\underline{S}_{\Delta_1}(f) \le \underline{S}_{\Delta}(f) \le \overline{S}_{\Delta}(f) \le \overline{S}_{\Delta_2}(f) \qquad \therefore \quad \underline{S}_{\Delta_1}(f) \le \overline{S}_{\Delta_2}(f)$$

(3)　(2) の結果は，任意の分割 Δ_2 に対して，$\overline{S}_{\Delta_2}(f)$ は実数の集合 $\{\underline{S}_{\Delta_1}(f) \,|\, \Delta_1 \in \mathfrak{D}\}$ の上界であることを示している．したがって，下積分 $\underline{S}(f)$ および上限の定義より

$$\underline{S}(f) = \sup\{\underline{S}_{\Delta_1}(f) \,|\, \Delta_1 \in \mathfrak{D}\} \le \overline{S}_{\Delta_2}(f) \quad (\forall \Delta_2 \in \mathfrak{D})$$

が成り立つが，これは $\underline{S}(f)$ が実数の集合 $\{\overline{S}_{\Delta_2}(f) \,|\, \Delta_2 \in \mathfrak{D}\}$ の下界であることを示している．したがって，上積分および下限の定義より

$$\underline{S}(f) \le \inf\{\overline{S}_{\Delta_2}(f) \,|\, \Delta_2 \in \mathfrak{D}\} = \overline{S}(f)$$

となり，$\underline{S}(f) \le \overline{S}(f)$ が従う．(証明終)

補題 5.2 区間 I の分割 Δ に l 個の分点を加えることによって得られる分割を Δ' とすると，

$$\underline{S}_{\Delta'}(f) - \underline{S}_{\Delta}(f) \le l(M-m)|\Delta|, \qquad \overline{S}_{\Delta}(f) - \overline{S}_{\Delta'}(f) \le l(M-m)|\Delta|$$

が成り立つ．ここで，$M = \sup_{x\in I} f(x)$ および $m = \inf_{x \in I} f(x)$ である．

証明 不足和に対する不等式を証明しよう．$l=1$ の場合，補題 5.1 (1) の証明における記号を用いると，$m \le m_k \le m_k', m_k'' \le M$ より

$$\begin{aligned}\underline{S}_{\Delta'}(f) - \underline{S}_{\Delta}(f) &= (m_k' - m_k)(\bar{x} - x_{k-1}) + (m_k'' - m_k)(x_k - \bar{x}) \\ &\le (M-m)\big((\bar{x} - x_{k-1}) + (x_k - \bar{x})\big) \\ &\le (M-m)|\Delta|\end{aligned}$$

が成り立つ．一般の l の場合には，分割 Δ に 1 個ずつ分点を加えることによって得られる分割の列を $\Delta = \Delta_0 \preceq \Delta_1 \preceq \Delta_2 \preceq \cdots \preceq \Delta_l = \Delta'$ とすると，$|\Delta_j| \le |\Delta|$ $(0 \le j \le l)$ であり，$l=1$ の場合の結果より

$$\begin{aligned}&\underline{S}_{\Delta'}(f) - \underline{S}_{\Delta}(f) \\ &= \big(\underline{S}_{\Delta_l}(f) - \underline{S}_{\Delta_{l-1}}(f)\big) + \big(\underline{S}_{\Delta_{l-1}}(f) - \underline{S}_{\Delta_{l-2}}(f)\big) + \cdots + \big(\underline{S}_{\Delta_1}(f) - \underline{S}_{\Delta_0}(f)\big) \\ &\le (M-m)|\Delta_{l-1}| + (M-m)|\Delta_{l-2}| + \cdots + (M-m)|\Delta_0| \\ &\le l(M-m)|\Delta|\end{aligned}$$

が得られる．過剰和に対する不等式も同様にして示される．(証明終)

補題 5.1 より，分割 Δ を細分していくことによって分割の幅 $|\Delta|$ を小さくしていくと，不足和 $\underline{S}_{\Delta}(f)$ は単調に増加し，過剰和 $\overline{S}_{\Delta}(f)$ は単調に減少していく．また，不足和の上限が下積分 $\underline{S}(f)$ であり，過剰和の下限が上積分 $\overline{S}(f)$ であった．一方，数学A 3 で学んだように，数列 $\{a_n\}$ が単調増加（または減少）でありかつ上（または下）に有界ならば，その極限値が存在しかつ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} a_n \quad \Big(\text{または } \inf_{n\in\mathbf{N}} a_n\Big)$$

が成り立つ．これに類似するものとして，次の Darboux の定理が成り立つ．

定理 5.1（Darboux）　$\underline{S}(f) = \lim_{|\Delta|\to 0} \underline{S}_{\Delta}(f)$,　$\overline{S}(f) = \lim_{|\Delta|\to 0} \overline{S}_{\Delta}(f)$

証明 下積分に対する式を証明しよう．下積分の定義および上限の性質（定理 1.1）より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_{\Delta_0}(f)$$

となるような区間 I の（十分細かな）分割 Δ_0 が存在する．さて，Δ を区間 I の任意の分割としよう．Δ に Δ_0 の分点を合わせて得られる分割を Δ' とする．このとき，補題 5.2 より

$$\underline{S}_{\Delta'}(f) - \underline{S}_{\Delta}(f) \le n_0(M-m)|\Delta|$$

が成り立つ．ただし，n_0 は分割 Δ_0 の端点を除いた分点の個数である．この不等式を考慮して，

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2n_0(M-m)+1}$$

により正数 δ を定める．このとき，分割 Δ が $|\Delta| < \delta$ を満たしていれば

$$\underline{S}_{\Delta'}(f) - \underline{S}_{\Delta}(f) \leq n_0(M-m)\delta < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．さらに $\Delta_0 \preceq \Delta'$ に注意すると，補題 5.1 より $\underline{S}_{\Delta_0}(f) \leq \underline{S}_{\Delta'}(f)$ が成り立つ．以上のことから，$|\Delta| < \delta$ を満たす任意の分割 Δ に対して

$$\begin{aligned} |\underline{S}(f) - \underline{S}_{\Delta}(f)| &= \big(\underline{S}(f) - \underline{S}_{\Delta_0}(f)\big) + \big(\underline{S}_{\Delta'}(f) - \underline{S}_{\Delta}(f)\big) - \big(\underline{S}_{\Delta'}(f) - \underline{S}_{\Delta_0}(f)\big) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - 0 = \varepsilon \end{aligned}$$

となる．これは，$|\Delta| \to 0$ のとき $\underline{S}_{\Delta}(f) \to \underline{S}(f)$ となることを示している．上積分に対する式も同様にして示される．(証明終)

定理 5.2 次の 3 条件 (1)–(3) は互いに同値である．

(1) 関数 f は区間 I で可積分である．
(2) $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ （Darboux の可積分条件）
(3) 任意の正数 ε に対して，区間 I のある分割 Δ が存在して $0 \leq \overline{S}_{\Delta}(f) - \underline{S}_{\Delta}(f) < \varepsilon$ が成り立つ．

証明 (2)⇒(3): Darboux の定理（定理 5.1）および仮定より

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \big(\overline{S}_{\Delta}(f) - \underline{S}_{\Delta}(f)\big) = \overline{S}(f) - \underline{S}(f) = 0$$

が成り立つ．言い換えれば，任意の正数 ε に対して十分小さな正数 δ を取れば，$|\Delta| < \delta$ を満たす任意の分割 Δ に対して $0 \leq \overline{S}_{\Delta}(f) - \underline{S}_{\Delta}(f) < \varepsilon$ が成り立ち，特に条件 (3) が成り立つ．

(3)⇒(2): 任意の正数 ε に対して，仮定より（十分細かな）ある分割 Δ が存在して

$$0 \leq \overline{S}_{\Delta}(f) - \underline{S}_{\Delta}(f) < \varepsilon$$

が成り立つ．一方，補題 5.1 (3) より $\underline{S}_{\Delta}(f) \leq \underline{S}(f) \leq \overline{S}(f) \leq \overline{S}_{\Delta}(f)$ であるから

$$\begin{gathered} 0 \leq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) \leq \overline{S}_{\Delta}(f) - \underline{S}_{\Delta}(f) < \varepsilon \\ \therefore \quad |\overline{S}(f) - \underline{S}(f)| < \varepsilon \end{gathered}$$

この最後の不等式が任意の正数 ε に対して成り立つことから，条件 (2) が従う．

(2)⇒(1): (5.3) 式より，任意の分割 Δ および代表元 ξ に対して

$$\underline{S}_{\Delta}(f) \leq S(f, \Delta, \xi) \leq \overline{S}_{\Delta}(f)$$

が成り立っていることに注意しよう．ここで，Darboux の定理（定理 5.1）および仮定より

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \underline{S}_{\Delta}(f) = \underline{S}(f) = \overline{S}(f) = \lim_{|\Delta| \to 0} \overline{S}_{\Delta}(f)$$

であるから，はさみうちの定理より，代表元 ξ の選び方に関係なく

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(f, \Delta, \xi) = \underline{S}(f) = \overline{S}(f)$$

となる．これは f が I で可積分であり，その積分値が $\underline{S}(f)$ $\big(=\overline{S}(f)\big)$ であることを示している．

(1)⇒(2): 任意の正数 ε に対して，仮定より，十分小さな正数 δ が存在し，$|\Delta|<\delta$ を満たす任意の分割 Δ および任意の代表元 ξ に対して次式が成り立つ．

$$\left|S(f,\Delta,\xi)-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon \qquad \therefore \quad \int_a^b f(x)dx-\varepsilon<S(f,\Delta,\xi)<\int_a^b f(x)dx+\varepsilon$$

この不等式の辺々の ξ に関する下限をとり，(5.2) 式に注意すれば

$$\int_a^b f(x)dx-\varepsilon\le \underline{S}_\Delta(f)\le\int_a^b f(x)dx+\varepsilon \qquad \therefore \quad \left|\underline{S}_\Delta(f)-\int_a^b f(x)dx\right|\le\varepsilon$$

これは $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0}\underline{S}_\Delta(f)=\int_a^b f(x)dx$ となることを示している．同様にして，$\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0}\overline{S}_\Delta(f)=\int_a^b f(x)dx$ も示される．以上のことと Darboux の定理（定理 5.1）より

$$\underline{S}(f)=\lim_{|\Delta|\to 0}\underline{S}_\Delta(f)=\int_a^b f(x)dx=\lim_{|\Delta|\to 0}\overline{S}_\Delta(f)=\overline{S}(f)$$

となり (2) が従う．(証明終)

5.3 連続関数の可積分性

閉区間 I で連続な関数 f が可積分であることは高校で習ってきた．次に，定理 5.2 を用いてこの事実を証明しよう．そのために，連続性の概念を少し強めた一様連続性について紹介する．

定義 5.4 区間 I で定義された関数 f が I で**一様連続**であるとは，任意の正数 ε に対してある（十分小さな）正数 δ が存在し，$|x-y|<\delta$ を満たす任意の $x,y\in I$ に対して $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ が成り立つときをいう．

f が I で一様連続であることの定義を論理記号を用いて書くと次のようになる．

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in I\ (|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon) \tag{5.4}$$

一方，f が I で単に連続であることの定義は次のようなものであった．

$$\forall x\in I\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall y\in I\ (|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon)$$

これらの違いは「$\forall x\in I$」の位置にある．(第 0.2 節において論理記号 $\forall$ および $\exists$ の順番の重要性が説明されていたことを思い起こそう.）単に連続である場合，それは先頭にありしたがって「$\exists\delta>0$」の前にあるのに対して，一様連続の場合には「$\exists\delta>0$」の後にある．それによって何が変わるのかというと，δ が何に依存して決まってくるのかということである．単に連続である場合，位置 x と正数 ε を固定するごとに正数 δ が決まり，δ は ε だけでなく位置 x にも依存している．すなわち，位置 x を変えるとそれに応じて δ をさらに小さくしなければならない場合がある．それに対して一様連続である場合，δ は ε だけから決まり，位置 x に関して無関係に（すなわち一様に）取ることができる．このように，正数 δ を位置 x に関して一様に取れることから一様連続と呼ばれるのである．

問 5.1 区間 I で定義された関数 f に対して，ある定数 $L\ge 0$ が存在し，任意の $x,y\in I$ に対して $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$ が成り立つとき，f は I で Lipschitz（リプシッツ）連続であるという．f が I で Lipschitz 連続ならば，I で一様連続であることを示せ．

単なる連続の定義では論理記号を使わなくても極限記号を使うことによって定義することができた．一様連続の定義も論理記号を使わず極限記号を使うことによって定義することができる．すなわち，次の定理が成り立つ．その証明は問として残しておこう．

定理 5.3 区間 I で定義された関数 f が I で一様連続になるための必要十分条件は次式が成り立つことである．

$$\lim_{\delta\to+0}\sup_{x,y\in I,\,|x-y|<\delta}|f(x)-f(y)|=0$$

問 5.2 定理 5.3 を証明せよ．

上の説明から明らかなように，一様連続であったら連続である．しかし，次の例から分かるようにその逆は一般には成り立たない．

例 5.2 $f(x)=\frac{1}{x}$ により定まる関数 f は半開区間 $I=(0,1]$ で連続であるが一様連続ではない．

実際，一様連続であると仮定してみよう．このとき，$\varepsilon=1$ に対してある正数 δ が存在して，任意の $x,y\in(0,1]$ に対して

$$|x-y|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-f(y)|<1$$

が成り立たなければならない．そこで，区間 $(0,1]$ に含まれる数列 $\{x_n\}$ を $x_n=2^{-n}$ $(n\in\mathbf{N})$ で定めよう．このとき，$|x_{n+1}-x_n|=2^{-(n+1)}\to0$ $(n\to\infty)$ であるから，十分大きな自然数 n_0 を取れば $|x_{n+1}-x_n|<\delta$ $(\forall n\geq n_0)$ となる．それゆえ

$$|f(x_{n+1})-f(x_n)|<1 \qquad (\forall n\geq n_0)$$

が成り立たなければならない．ところが，この左辺を具体的に計算してみると

$$|f(x_{n+1})-f(x_n)|=2^n\to\infty \qquad (n\to\infty)$$

となり，上式に矛盾する．したがって，f は I で一様連続ではない．

なぜこの関数 f が区間 $(0,1]$ で一様連続にならないかというと，$f(x)=\frac{1}{x}$ は $x=0$ の近くで急激に変化しており，$x=0$ の近くでは x がごくわずかに変化しただけでも，$f(x)$ の値は非常に大きく変化してしまう．したがって，位置 x が 0 に近づけば近づくほど，それに応じて δ の値を小さく取らない限り「$|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$」は成り立たないのである．

この例のように，関数 f が定義されている区間 I の端点が開いており，関数 f の変化がその端点に向かうほど激しくなっているような場合に f の一様連続性が失われる．逆に言うと，区間 I の端点が閉じている場合にそのような関数の例を思い浮かべようとしても上手くいかないであろう．実際，次の定理が成り立つ．

定理 5.4 閉区間 $I=[a,b]$ で連続な関数 f は I で一様連続である．

証明 背理法で証明しよう．そのために，f は I で連続であるが一様連続ではないと仮定しよう．このとき，(5.4) の否定が成り立つ．その否定命題を公理 0.1 を用いて変形すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\neg\bigl(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in I\ (|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon)\bigr)\\
&\quad\equiv\ \exists\varepsilon>0\ \neg\bigl(\exists\delta>0\ \forall x,y\in I\ (|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon)\bigr)\\
&\quad\equiv\ \exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \neg\bigl(\forall x,y\in I\ (|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon)\bigr)\\
&\quad\equiv\ \exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x,y\in I\ \neg(|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon)\\
&\quad\equiv\ \exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x,y\in I\ (|x-y|<\delta\ \text{かつ}\ |f(x)-f(y)|\geq\varepsilon)
\end{aligned}$$

この最後の変形において，２つの命題 P, Q に対して「$P \Rightarrow Q$」の否定命題は「P かつ $\neg Q$」であることを用いた．さて，任意の自然数 n に対して，この最後の論理式における $\delta > 0$ として $\delta = \frac{1}{n}$ を取ると，それに応じて次式を満たす $x_n, y_n \in I$ が存在することが分かる．

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{かつ} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \tag{5.5}$$

このようにして上式を満たす数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ が定まる．数列 $\{x_n\}$ は有界であるから，Bolzano–Weierstrass の定理（定理 1.10）より収束する部分列 $\{x_{\varphi(n)}\}$ およびその極限値 $x_0 \in \mathbf{R}$ が存在する．さらに $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$ において $n \to \infty$ とすれば $a \leq x_0 \leq b$，それゆえ $x_0 \in I$ が成り立つ．また，

$$|y_{\varphi(n)} - x_0| \leq |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - x_0| \leq \frac{1}{\varphi(n)} + |x_{\varphi(n)} - x_0| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

より，$\{y_n\}$ の部分列 $\{y_{\varphi(n)}\}$ もまた $\{x_{\varphi(n)}\}$ と同じ極限値 x_0 に収束する．そこで，

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon$$

において $n \to \infty$ とすると，f の x_0 における連続性により $0 = |f(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ となるが，これは $\varepsilon > 0$ に矛盾する．したがって，f は I で一様連続である.（証明終）

上の証明では，f が I で一様連続ではないと仮定して (5.5) 式を満たす I 内の数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を構成した．論理記号を使わずこのような数列が存在することを説明するのは大変であろう．この証明からも，なぜわざわざ論理記号を使うのかを分かって頂きたい．さらに，否定命題を作る際，公理 0.1 を用いて形式的に $\forall$ と $\exists$ を交換した．論理記号を使うと，その意味を深く考えなくても，機械的に記号の交換を行うだけでいとも簡単に否定命題を作れてしまうのである．これは思考の節約と言えよう．ただし，形式的な操作だけで否定命題を作るのではなく，時にはその否定命題の意味を考えることも重要である．

問 5.3　以下で定められる関数 f が区間 I で一様連続であるかどうかを判定せよ．

(1)　$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad I = (0, \infty)$
(2)　$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad I = (0, 1]$
(3)　$f(x) = x^2, \quad I = [0, \infty)$

以上の準備の下，連続関数の可積分性を証明しよう．

定理 5.5 閉区間 $I = [a, b]$ で連続な関数 f は I で可積分である．

証明　仮定および定理 5.4 より f は I で一様連続である．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分小さな $\delta > 0$ が存在し，任意の $x, y \in I$ に対して

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

となる．Δ を $|\Delta| < \delta$ を満たす区間 I の任意の分割としよう．その各小区間 Δ_j $(1 \leq j \leq n)$ は閉区間であり，関数 f はそこで連続である．したがって，定理 2.5 より f は各小区間 Δ_j において最大値 M_j および最小値 m_j をとる．すなわち，次式を満たす $\alpha_j, \beta_j \in \Delta_j$ が存在する．

$$M_j = \sup_{x \in \Delta_j} f(x) = f(\alpha_j), \qquad m_j = \inf_{x \in \Delta_j} f(x) = f(\beta_j)$$

ここで，$|\alpha_j-\beta_j|\le|\Delta|<\delta$ より $M_j-m_j=|f(\alpha_j)-f(\beta_j)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ であることに注意すると

$$0\le\overline{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)=\sum_{j=1}^{n}(M_j-m_j)(x_j-x_{j-1})<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_{-1})=\varepsilon$$

となる．したがって，定理 5.2 より f は I で可積分である．(証明終)

問 5.4　閉区間 $I=[a,b]$ で単調増加（あるいは単調減少）な関数 f は I で可積分であることを定理 5.2 を用いて証明せよ．

問 5.5　閉区間 $I=[a,b]$ で有界な関数 f が開区間 (a,b) で連続であれば，f は I で可積分であることを定理 5.2 を用いて証明せよ．

この問 5.5 における結果を用いると，例えば

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & (0<x\le1)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

で定まる関数 f は閉区間 $[0,1]$ で可積分であることが分かる．なお，この関数 f の $x=0$ における値をどのように入れ替えても，$x=0$ では連続にはならないことに注意しよう．

次の定理は非常に使いやすいが，その証明は技巧的であるから，最初は読み飛ばして構わない．

定理 5.6　f は閉区間 $I=[a,b]$ で可積分であり，$m\le f(x)\le M$ $(\forall x\in I)$ を満たすとする．このとき，閉区間 $[m,M]$ で定義された任意の連続関数 ϕ に対して，合成関数 $\phi\circ f$ もまた I で可積分となる．

証明　ϕ は閉区間 $[m,M]$ で連続であるから，定理 2.5 より最大値および最小値をとる．特に，ϕ は有界な関数であり，

$$|\phi(y)|\le K\qquad(\forall y\in[m,M])$$

を満たす正数 K が存在する．また，定理 5.4 より ϕ は $[m,M]$ で一様連続であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対して十分小さな $\delta>0$ が存在し，任意の $y_1,y_2\in[m,M]$ に対して

$$|y_1-y_2|<\delta\quad\Rightarrow\quad|\phi(y_1)-\phi(y_2)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

となる．一方，f は I で可積分であるから，定理 5.2 より区間 I のある分割 $\Delta:a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ が存在して

$$0\le\overline{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)<\frac{\varepsilon\delta}{4K}$$

が成り立つ．この分割 Δ に対して

$$M_j:=\sup_{x\in\Delta_j}f(x),\quad m_j:=\inf_{x\in\Delta_j}f(x)$$
$$J_1:=\{j\,|\,M_j-m_j<\delta\},\quad J_2:=\{j\,|\,M_j-m_j\ge\delta\}$$

と定めよう．$j\in J_1$ の場合，任意の $x,x'\in\Delta_j$ に対して

$$|f(x)-f(x')|\le M_j-m_j<\delta\qquad\therefore\quad\phi(f(x))-\phi(f(x'))<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$
$$\therefore\quad\phi(f(x))<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}+\phi(f(x'))$$

となる．この両辺の $x \in \Delta_j$ に関する上限，$x' \in \Delta_j$ に関する下限を取れば

$$\widetilde{M_j} \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \widetilde{m}_j \qquad \therefore \quad \widetilde{M_j} - \widetilde{m}_j \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (\forall j \in J_1)$$

が成り立つ．ただし，$\widetilde{M_j} := \sup_{x \in \Delta_j} \phi(f(x))$ および $\widetilde{m}_j := \inf_{x \in \Delta_j} \phi(f(x))$ である．また，$j \in J_2$ の場合，$\widetilde{M_j} - \widetilde{m}_j \leq 2K$ が成り立っていることに注意する．このとき，

$$\begin{aligned}\overline{S}_\Delta(\phi \circ f) - \underline{S}_\Delta(\phi \circ f) &= \sum_{j \in J_1} (\widetilde{M_j} - \widetilde{m}_j)(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j \in J_2} (\widetilde{M_j} - \widetilde{m}_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j \in J_1} (x_j - x_{j-1}) + 2K \sum_{j \in J_2} (x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2K \sum_{j \in J_2} (x_j - x_{j-1})\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，

$$\delta \sum_{j \in J_2} (x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j \in J_2} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \leq \overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \frac{\delta\varepsilon}{4K}$$
$$\therefore \quad 2K \sum_{j \in J_2} (x_j - x_{j-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

したがって，$0 \leq \overline{S}_\Delta(\phi \circ f) - \underline{S}_\Delta(\phi \circ f) < \varepsilon$ が成り立つ．ゆえに，定理 5.2 より $\phi \circ f$ は I で可積分である．(証明終)

この定理より，関数 f が閉区間 I で有界な可積分関数ならば，$(f(x))^m$, $|f(x)|$, $e^{f(x)}$, $\sin(f(x))$ 等の関数もまた I で可積分になることが分かる．

5.4 積分の基本性質と微分積分学の基本定理

定理 5.7 f, g を閉区間 $[a, b]$ で可積分な関数とし，α, β を定数とする．このとき，$\alpha f + \beta g$ もまた $[a, b]$ で可積分であり次式が成り立つ．

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \qquad \text{(積分の線形性)}$$

さらに，f, g が有界であれば，fg もまた $[a, b]$ で可積分である．

証明 対応する Riemann 和を考えると，

$$\begin{aligned}S(\alpha f + \beta g, \Delta, \xi) &= \sum_{j=1}^n \big(\alpha f(\xi_j) + \beta g(\xi_j)\big)(x_j - x_{j-1}) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) + \beta \sum_{j=1}^n g(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &= \alpha S(f, \Delta, \xi) + \beta S(g, \Delta, \xi) \\ &\to \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \qquad (|\Delta| \to 0)\end{aligned}$$

したがって，$\alpha f + \beta g$ もまた $[a,b]$ で可積分であり，積分の線形性が成り立つ．また，等式

$$fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big)$$

に注意すれば，前半の結果および定理 5.6 より fg の可積分性が従う．（証明終）

定理 5.8　f, g は閉区間 $[a,b]$ で可積分な関数であり，$f(x) \le g(x)$ $(\forall x \in [a,b])$ を満たすとする．このとき，次式が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \qquad \text{（積分の単調性）}$$

上の仮定に加え，ある点 $c \in [a,b]$ で f, g は連続であり，$f(c) < g(c)$ を満たすとする．このとき，次式が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

証明　Riemann 和に対する不等式

$$S(f,\Delta,\xi) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \le \sum_{j=1}^n g(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = S(g,\Delta,\xi)$$

において $|\Delta| \to 0$ とすれば定理の前半の主張が従う．後半の主張の証明は問として残しておこう．（証明終）

問 5.6　定理 5.8 の後半の主張を証明せよ．

定理 5.9　f が閉区間 $[a,b]$ で有界かつ可積分であれば，$|f|$ もまた $[a,b]$ で可積分であり次式が成り立つ．

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

証明　$|f|$ の可積分性は定理 5.6 から従う．また，$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ $(\forall x \in [a,b])$ に注意して定理 5.8, 5.7 を用いると

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

となる．これより望みの式が従う．あるいは，Riemann 和に対する不等式

$$|S(f,\Delta,\xi)| = \left|\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})\right| \le \sum_{j=1}^n |f(\xi_j)|(x_j - x_{j-1}) = S(|f|,\Delta,\xi)$$

において $|\Delta| \to 0$ としてもよい．（証明終）

f が $[a,b]$ で可積分であるとき，

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^a f(x)dx := 0$$

と定める．次の積分の加法性も既に高校のときに学んできており，先に紹介した定理と同様にして証明することができる．その証明は問として残しておこう．

定理 5.10　f が閉区間 I で可積分であれば，I に含まれる任意の閉区間 J においても f は可積分である．さらに，任意の $a,b,c \in I$ に対して次式が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \qquad \text{（積分の加法性）}$$

問 5.7　定理 5.10 を証明せよ．

問 5.8　f が閉区間 $[a,b]$ および $[b,c]$ で可積分であれば，それらを繋げた閉区間 $[a,c]$ でも可積分であり，積分の加法性が成り立つことを示せ．

定理 5.11（積分の平均値定理）　f が $I=[a,b]$ で有界かつ可積分であれば，次式を満たす $\mu \in \mathbf{R}$ が存在する．

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) \quad \text{および} \quad \inf_{x\in I} f(x) \le \mu \le \sup_{x\in I} f(x)$$

特に，f が $[a,b]$ で連続ならば，次式を満たす $\theta \in (0,1)$ が存在する．

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(a+\theta(b-a))$$

証明　$M := \sup_{x\in I} f(x)$ および $m := \inf_{x\in I} f(x)$ とおくと，$m \le f(x) \le M$ $(\forall x \in I)$ が成り立つ．したがって，積分の単調性（定理 5.8）より

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

となる．それゆえ，

$$\mu := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

とおけば望みの式が従う．

次に，f の連続性を仮定しよう．また，f が定数関数の場合，定理の主張は明らかなので，f は定数関数でないとする．このとき，定理 2.5 より f は $[a,b]$ で最大値および最小値をとる．したがって，$M = f(c_1)$ および $m = f(c_2)$ となる $c_1, c_2 \in [a,b]$ が存在する．このとき，もちろん，$m \le f(x) \le M$ $(\forall x \in I)$ が成り立っている．さらに，中間値の定理（定理 2.6）より $m < f(c_3) < M$ となる c_3 が c_1 と c_2 の間に存在するので，定理 5.8 より

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$$

すなわち，$f(c_2) < \mu < f(c_1)$ が得られる．再び，中間値の定理（定理 2.6）より $\mu = f(c)$ となる c が c_1 と c_2 の間に存在する．$c \in (a,b)$ であるから，適当な $\theta \in (0,1)$ を取れば $c = a + \theta(b-a)$ と書くことができ，

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu = f(c) = f(a+\theta(b-a))$$

となる．（証明終）

定理 5.12（微分積分学の基本定理）

(1)　f を $[a,b]$ で連続な関数，$c \in [a,b]$ とし，関数 F を $F(x) := \int_c^x f(y)dy$ で定める．このとき，F は $[a,b]$ で C^1 級であり $F' = f$ となる．すなわち，次式が成り立つ．

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(y)dy = f(x)$$

(2)　F を $[a,b]$ で C^1 級の関数とすると，次式が成り立つ．

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

証明　(1)　$x \in [a,b]$ を任意に固定する．このとき，積分の加法性（定理 5.10）および積分の平均値定理（定理 5.11）よりある $\theta \in (0,1)$ が存在して次式が成り立つ．

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_c^{x+h} f(y)dy - \int_c^x f(y)dy\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)dy = f(x+\theta h)$$

したがって，f の x における連続性より

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| = |f(x+\theta h) - f(x)| \to 0 \qquad (h \to 0)$$

となり，$F'(x) = f(x)$ が従う．さらに，f は連続であるから F' もまた連続であり，F は C^1 級であることが分かる．

(2)　$G(x) := \int_a^x F'(y)dy$ とおくと，(1) の結果より $G'(x) = F'(x)$，それゆえ $(G-F)'(x) = 0$ が成り立つ．したがって，定理 3.7 (3) より $G-F$ は定数関数であることが分かり，特に $G(b)-F(b) = G(a)-F(a)$ が成り立つ．したがって，

$$\int_a^b F'(x)dx = G(b) = G(a) + F(b) - F(a) = F(b) - F(a)$$

となり望みの式が従う．

あるいは次のように証明してもよい．$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ を区間 $[a,b]$ の任意の分割とする．このとき，各小区間 $\Delta_j = [x_{j-1}, x_j]$ において平均値の定理（定理 3.6）を用いると，次式を満たす $\xi_j \in \Delta_j$ が存在することが分かる．

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = F'(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

この $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ を代表元として用いて F' の Riemann 和を計算すると

$$\begin{aligned} S(F', \Delta, \xi) &= \sum_{j=1}^n F'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \bigl(F(x_j) - F(x_{j-1})\bigr) \\ &= \bigl(F(x_n) - F(x_{n-1})\bigr) + \bigl(F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\bigr) + \cdots + \bigl(F(x_1) - F(x_0)\bigr) \\ &= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

となる．ここで $|\Delta| \to 0$ とすると

$$\int_a^b F'(x)dx = \lim_{|\Delta| \to 0} S(F', \Delta, \xi) = F(b) - F(a)$$

となり望みの式が従う．（証明終）

定義 5.5 f, F を区間 I で定義された関数とする．F が f の**原始関数**であるとは，F は I で微分可能であり $F'(x) = f(x)$ $(\forall x \in I)$ が成り立つときをいう．

f を区間 $[a,b]$ における連続関数，$c \in [a,b]$ とすると，微分積分学の基本定理より，$F(x) = \int_c^x f(y)dy$ で定まる関数 F は f の原始関数である．したがって，連続関数に対しては必ず原始関数が存在する．また，$f(x)$ の 1 つの原始関数 $F(x)$ に定数を加えた $F(x)+C$ もまた $f(x)$ の原始関数になる．さらに $f(x)$ の原始関数はこの形に限られる．(すなわち，原始関数は定数差を除いて高々 1 つである．）そこで，これを

$$\int f(x)dx$$

と書き f の**不定積分**という．F を連続関数 f の原始関数とすると，微分積分学の基本定理より

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \text{（微分積分学の基本公式）}$$

が成り立つ．積分の定義に基づいて積分値を計算しようとすれば，区分求積法で面倒な数列の和の計算と極限値の計算をしなければならない．例えば，$f(x) = x^2$ を区間 $[0,1]$ で積分するのに，n 等分割を用いた区分求積法で計算すると

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

となる．ところが，$f(x) = x^2$ の原始関数の 1 つが $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ であることに注意し微分積分学の基本公式を用いて計算すれば次のように非常に簡単に計算できる．

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

歴史的に見ると，微分の発見および微分積分学の基本公式の発見により，面積や体積を求める積分計算が著しく簡単にできるようになったのである．

定理 5.13（置換積分法）　f を区間 $[a,b]$ で連続な関数，ϕ を区間 $[\alpha,\beta]$ で C^1 級の関数で ϕ と f は合成可能であり，$\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$ を満たすとする．このとき，次式が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

証明　$F(x) := \displaystyle\int_a^x f(y)dy$ とおくと，微分積分学の基本定理より $F'(x) = f(x)$ となる．したがって，合成関数の微分法（定理 3.3）より

$$\frac{d}{dt}F\big(\phi(t)\big) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$$

が成り立つ．この両辺を α から β まで積分し微分積分学の基本定理を用いると

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt &= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(\phi(t))dt = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

となり望みの式が従う．(証明終)

定理 5.14（部分積分法）　f, g を区間 $[a, b]$ で C^1 級の関数とすると，次式が成り立つ．

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \tag{5.6}$$

証明　積の微分法より，

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

となる．この両辺を a から b まで積分し微分積分学の基本定理を用いれば望みの式が従う．(証明終)

(5.6) 式では高校の時に習った記号 $[h(x)]_a^b = h(b) - h(a)$ を用いている．この記号はしばしば $h(x)\big|_a^b$ と書かれる，すなわち，$h(x)\big|_a^b = h(b) - h(a)$ である．

例 5.3（有限 Taylor 展開）　第 3.4 節では Rolle の定理（定理 3.5）を利用して有限 Taylor 展開（定理 3.12）を導いた．ここでは，部分積分を利用してそれを導こう．微分積分学の基本定理および部分積分より

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(y)dy = \int_a^x \left(-\frac{d}{dy}(x-y)\right) f'(y)dy \\ &= [-(x-y)f'(y)]_{y=a}^x - \int_a^x \big(-(x-y)\big) f''(y)dy \\ &= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-y)f''(y)dy \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \int_a^x (x-y)f''(y)dy &= \int_a^x \left(-\frac{d}{dy}\frac{(x-y)^2}{2}\right) f''(y)dy \\ &= \left[-\frac{(x-y)^2}{2}f''(y)\right]_{y=a}^x - \int_a^x \left(-\frac{(x-y)^2}{2}\right) f'''(y)dy \\ &= \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \int_a^x \frac{(x-y)^2}{2} f'''(y)dy \end{aligned}$$

より

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \int_a^x \frac{(x-y)^2}{2} f'''(y)dy$$

さらに

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-y)^2}{2} f'''(y)dy &= \int_a^x \left(-\frac{d}{dy}\frac{(x-y)^3}{3!}\right) f'''(y)dy \\ &= \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \int_a^x \frac{(x-y)^3}{3!} f''''(y)dy \end{aligned}$$

より

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \int_a^x \frac{(x-y)^3}{3!} f''''(y)dy$$

以下この操作を繰り返せば，C^n 級の関数 f に対して有限 Taylor 展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(x)$$

が成り立つことが分かる．今の場合，剰余項 $R_n(x)$ は次の形になる．

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(y)dy$$

これを **Bernoulli（ベルヌーイ）の剰余**という．さらに，この積分に対して積分の平均値定理（定理 5.11）を適用すれば，次式を満たす $\theta \in (0,1)$ が存在することが分かる．

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta(x-a))$$

これを **Cauchy の剰余**という．

問 5.9　非負整数 m, n に対して，$I_{m,n} := \displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ とおく．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　$I_{m,n} = \frac{n}{m+1} I_{m+1,n-1}$　$(m \geq 0, n \geq 1)$ が成り立つことを示せ．
(2)　$I_{m,n}$ を求めよ．

問 5.10　非負整数 n に対して，$J_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ とおく．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$　$(n \geq 2)$ が成り立つことを示せ．
(2)　J_n を求めよ．
(3)　$J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1}$　$(n \geq 1)$ が成り立つことを示し，(2) の結果を用いて次の Wallis（ウォリス）の公式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \sqrt{\pi}$ を証明せよ．

5.5　不定積分の計算法

前節での考察により，連続関数に対しては常に不定積分が存在することは分かった．ところが，皆がよく知っているような初等関数の不定積分が，再び初等関数で書けるとは限らない．ここでは，不定積分が初等関数で書けるような例を幾つか紹介しよう．

$f(x), g(x)$ を x の多項式とするとき，$\frac{g(x)}{f(x)}$ という形の関数を**有理関数**という．まず，実係数有理関数（すなわち，$f(x), g(x)$ が実係数多項式の場合）の不定積分の計算法を紹介しよう．

代数学の基本定理により，任意の多項式 $f(x)$ は複素係数の 1 次式の積に因数分解されることが知られている．すなわち，$f(x)$ を n 次多項式で x^n の係数を $a\ (\neq 0)$ とし，$a_j\ (1 \leq j \leq k)$ を $f(x)$ の相異なる複素数根でそれらの多重度を m_j とすると次式が成り立つ．

$$f(x) = a\prod_{j=1}^k (x-a_j)^{m_j} = a(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_k)^{m_k}$$

ここで，$n = m_1+m_2+\cdots+m_k$ である．さらに，$f(x)$ が実係数の多項式である場合，もし $f(x)$ が複素数根 $\alpha+i\beta$ をもてば，その共役複素数 $\alpha-i\beta$ もまた $f(x)$ の根になり $(x-(\alpha+i\beta))(x-(\alpha-i\beta)) = (x-\alpha)^2+\beta^2$ が成り立つ．したがって，実係数の多項式 $f(x)$ は実係数の 1 次式と 2 次式の積に因数分解される．すなわち，$f(x)$ を実係数 n 次多項式で x^n の係数を $a\ (\neq 0)$ とし，$f(x)$ の相異なる

実数根を a_j $(1 \leq j \leq k)$ でそれらの多重度を m_j，$f(x)$ の相異なる複素数根を $\alpha_j \pm i\beta_j$ $(1 \leq j \leq l)$ でそれらの多重度を n_j とすると次式が成り立つ．

$$f(x) = a\left(\prod_{j=1}^{k}(x-a_j)^{m_j}\right)\left(\prod_{j=1}^{l}((x-\alpha_j)^2+\beta_j^2)^{n_j}\right) \tag{5.7}$$

ここで，$n = m_1 + \cdots + m_k + 2(n_1 + \cdots + n_l)$ である．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 5.15（部分分数展開）　$f(x)$ を (5.7) の形の実係数多項式とし，$g(x)$ をその次数が $f(x)$ の次数より小さいような実係数多項式とする．このとき，有理関数 $\frac{g(x)}{f(x)}$ は次の形に展開される．

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{m_j}\frac{b_{jm}}{(x-a_j)^m} + \sum_{j=1}^{l}\sum_{m=1}^{n_j}\frac{c_{jm}x+d_{jm}}{((x-\alpha_j)^2+\beta_j^2)^m} \tag{5.8}$$

ここで，b_{jm}, c_{jm}, d_{jm} は実定数である．

この定理は代数学の範疇に入るので，その証明は割愛しよう．この定理より，任意の実係数有理関数は多項式と (5.8) の形の部分分数の和になる．実際，もし分子の次数が分母の次数以上の場合には，予め分子を分母で割っておけばよい．

例 5.4　$\frac{x^6}{x^4-1}$ を多項式と部分分数の和に展開しよう．まず，分子を分母で割っておき，分子の次数を下げよう．

$$\frac{x^6}{x^4-1} = \frac{x^2(x^4-1)+x^2}{x^4-1} = x^2 + \frac{x^2}{x^4-1}$$

ここで，$x^4-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ に注意して定理 5.15 を適用すると

$$\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{x+1} + \frac{C_3x+C_4}{x^2+1} \qquad (C_1, \ldots, C_4 \text{ は定数})$$

という展開式が成り立つことが分かる．そこで，定数 $C_1, \ldots, C_4$ を決定しよう．上式の右辺を通分し，両辺の分子を比較すれば次の恒等式が従う．

$$x^2 = C_1(x+1)(x^2+1) + C_2(x-1)(x^2+1) + (C_3x+C_4)(x^2-1) \tag{5.9}$$

この右辺を展開し，両辺の係数を比較することにより

$$C_1+C_2+C_3=0, \quad C_1-C_2+C_4=1, \quad C_1+C_2-C_3=0, \quad C_1-C_2-C_4=0$$
$$\therefore \quad C_1 = \frac{1}{4}, \quad C_2 = -\frac{1}{4}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{1}{2}$$

あるいは，(5.9) 式に $x = 1, -1, i$ を代入すれば，それぞれ $1 = 4C_1, 1 = -4C_2, -1 = -2(C_3i+C_4)$ となり，これからも係数 $C_1, \ldots, C_4$ が求まる．以上のことから，次の展開式が得られる．

$$\frac{x^6}{x^4-1} = x^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{2(x^2+1)}$$

これより特に，次の不定積分が計算される．

$$\int \frac{x^6}{x^4-1}dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\arctan x + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

さて，定理 5.15 より不定積分

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} \qquad \text{および} \qquad \int \frac{x+\gamma}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}dx$$

が計算できれば，すべての有理関数の不定積分が計算できることになる．前者の不定積分については次のようになる．

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \begin{cases} -\dfrac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C & (m \neq 1) \\ \log|x-a| + C & (m = 1) \end{cases}$$

後者の不定積分については次のように分解しよう．

$$\int \frac{x+\gamma}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}dx + (\alpha+\gamma)\int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}$$

この右辺第1項目の不定積分については次のようになる．

$$\int \frac{2(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{(m-1)((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}} + C & (m \neq 1) \\ \log((x-\alpha)^2+\beta^2) + C & (m = 1) \end{cases}$$

右辺第2項目の不定積分を計算するために

$$I_m := \int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}$$

とおき，I_m に対する漸化式を導こう．$m \geq 2$ に対しては，

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{1}{\beta^2}\int \frac{(x-\alpha)^2+\beta^2-(x-\alpha)^2}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}dx \\ &= \frac{1}{\beta^2}\left\{\int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}} - \frac{1}{2}\int (x-\alpha)\frac{2(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}dx\right\} \\ &= \frac{1}{\beta^2}\left\{I_{m-1} + \frac{1}{2}\int (x-\alpha)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{m-1}\frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}}\right)dx\right\} \\ &= \frac{1}{\beta^2}\left\{I_{m-1} + \frac{x-\alpha}{2(m-1)((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(m-1)}\int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}}\right\} \\ &= \frac{1}{\beta^2}\left\{\frac{x-\alpha}{2(m-1)((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)}I_{m-1}\right\} \end{aligned}$$

また，I_1 については $x = \alpha + \beta y$ なる置換積分を行うと

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int \frac{\beta dy}{(\beta y)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\int \frac{dy}{y^2+1} \\ &= \frac{1}{\beta}\arctan y + C = \frac{1}{\beta}\arctan\frac{x-\alpha}{\beta} + C \end{aligned}$$

この漸化式を解けば，I_m を求めることができる．

以上のことから，有理関数の不定積分が計算できることが分かった．

問 5.11　次式で定められる関数 f の不定積分を計算せよ．

(1)　$f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^3}$
(2)　$f(x)=\frac{1}{x^4-1}$
(3)　$f(x)=\frac{3x^3-7}{(x+1)^2(x^2+4)}$

次に三角関数の不定積分の計算法を紹介しよう．具体的には，$R(u,v)$ を u,v に関する有理関数とするとき，$R(\cos x,\sin x)$ の不定積分を考える．このとき，

$$\tan\frac{x}{2}=y \tag{5.10}$$

とおくと，

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1=\frac{2}{1+y^2}-1=\frac{1-y^2}{1+y^2}$$
$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2y}{1+y^2}$$
$$\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx=dy\quad\text{より}\quad dx=2\cos^2\frac{x}{2}dy=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}dy=\frac{2}{1+y^2}dy$$

したがって

$$\int R(\cos x,\sin x)dx=\int R\left(\frac{1-y^2}{1+y^2},\frac{2y}{1+y^2}\right)\frac{2}{1+y^2}dy$$

となる．この右辺は y についての有理関数の不定積分であるから，先に紹介したようにして計算することができる．

例 5.5　$\displaystyle\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx=\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right)+\log\left(1+2\cos^2\frac{x}{2}\right)+C$　（C は積分定数）

実際，(5.10) による置換積分を行うと

$$\begin{aligned}\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx&=\int\frac{2-\frac{2y}{1+y^2}}{2+\frac{1-y^2}{1+y^2}}\frac{2}{1+y^2}dy=\int\frac{4(y^2-y+1)}{(y^2+3)(y^2+1)}dy\\&=\int\left(\frac{4}{y^2+3}+\frac{2y}{y^2+3}-\frac{2y}{y^2+1}\right)dy\\&=\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{y}{\sqrt{3}}+\log\left(\frac{y^2+3}{y^2+1}\right)+C\\&=\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right)+\log\left(1+2\cos^2\frac{x}{2}\right)+C\end{aligned}$$

となる．なお，置換積分により不定積分を計算する場合，積分変数 y を元の変数 x に戻し忘れてしまう人が少なくない．この例では，下から 2 行目のところで計算を終えてしまうのである．置換積分を行ったときは，必ず元の変数に戻すことを忘れないようにしよう．

この計算法を紹介すると，三角関数の不定積分が出てきたとたん何も考えずに (5.10) による置換積分を行う人が少なくない．このような置換を行えば，取り敢えずは有理関数の不定積分に帰着されるが，その不定積分が簡単に計算できるとは限らないことは次の例からも分かるであろう．やみくもに置換 (5.10) を行うのではなく，被積分関数の形をよく見て，どんな置換をすると計算が簡単になるかを考えてから置換をするように心掛けよう．

例 5.6　(5.10) による置換積分を行うと，

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx &= \int \frac{\frac{2y}{1+y^2}}{1+\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2}\frac{2}{1+y^2}dy = \int \frac{2y}{1+y^4}dy \\ &= \int \frac{2y}{\left(\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right)\left(\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right)}dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)dy \\ &= \arctan\left(\sqrt{2}\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - \arctan\left(\sqrt{2}\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) + C \\ &= \arctan\left(\sqrt{2}\tan\frac{x}{2}-1\right) - \arctan\left(\sqrt{2}\tan\frac{x}{2}+1\right) + C\end{aligned}$$

となる．一方，$\cos x = y$ による置換を行うと，$-\sin x dx = dy$ より

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int \frac{dy}{1+y^2} = -\arctan y + C = -\arctan(\cos x) + C$$

となる．この後者の計算のほうが前者のよりはるかに簡単である．

これら 2 つの計算結果は一見すると異なっているように見えるが，実はそれらの関数が定義されているような任意の x に対して

$$\arctan\left(\sqrt{2}\tan\frac{x}{2}-1\right) - \arctan\left(\sqrt{2}\tan\frac{x}{2}+1\right) + \frac{\pi}{4} = -\arctan(\cos x)$$

が成り立ち，定数差の違いしかないことが確かめられる．このように，不定積分の計算結果はその計算方法，置換の仕方により見かけ上全く違うものになるが，それらは定数差の違いしかない．

この例でもそうであるが，

$$\int f(\cos x)\sin x dx \quad \text{あるいは} \quad \int f(\sin x)\cos x dx$$

という形の三角関数の不定積分を計算するには，それぞれ $\cos x = y$ あるいは $\sin x = y$ と置換するとよい．このことは，高校のときに既に習ってきたことであろう．

問 5.12　次式で定められる関数 f の不定積分を計算せよ．

(1)　$f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x}$

(2)　$f(x) = \frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}$　$(|a| \neq 1)$

(3)　$f(x) = \frac{1}{a+b\cos x}$　$(a, b > 0)$

次に 1 次分数関数の n 乗根を含むような無理関数の不定積分の計算法を紹介しよう．具体的には，$R(u, v)$ を u, v に関する有理関数とするとき，$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ の不定積分を考える．ただし，$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ とする．($\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ の場合，$\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ は定数であり，$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ は x の有理関数になる.) この場合，

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} = y$$

とおくと，

$$x = \frac{\delta y^n - \beta}{\alpha - \gamma y^n} \quad \text{および} \quad dx = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma) n y^{n-1}}{(\alpha - \gamma y^n)^2} dy$$

したがって，

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx = \int R\left(\frac{\delta y^n - \beta}{\alpha - \gamma y^n}, y\right) \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma) n y^{n-1}}{(\alpha - \gamma y^n)^2} dy$$

となる．この右辺は y についての有理関数の不定積分であるから，先に紹介したようにして計算することができる．

例 5.7 $\sqrt[6]{x} = y$ とおくと，$x = y^6$ および $dx = 6y^5 dy$．したがって，

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{dx}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3 - \left(\sqrt[6]{x}\right)^2} = \int \frac{6y^5}{y^3 - y^2} dy = 6 \int \frac{y^3}{y - 1} dy \\
&= 6 \int \left(y^2 + y + 1 + \frac{1}{y - 1}\right) dy \\
&= 2y^3 + 3y^2 + 6y + 6 \log|y - 1| + C \\
&= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \log|\sqrt[6]{x} - 1| + C
\end{aligned}$$

となる．

最後に２次関数の平方根を含むような無理関数の計算法を紹介しよう．具体的には，$R(u, v)$ を u, v に関する有理関数とするとき，次の不定積分を考える．

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx \qquad (a \neq 0)$$

$a > 0$ の場合，

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a} x$$

とおこう．上式の右辺第２項を左辺に移項した後，両辺を２乗すると

$$y^2 - 2\sqrt{a} y x = bx + c \qquad \therefore \quad x = \frac{y^2 - c}{b + 2\sqrt{a} y}$$

これより，y についての有理関数の不定積分に帰着されることが分かる．

$a < 0$ の場合，根号の中が非負でなければならないことから，２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が相異なる実数根 α, β $(\alpha < \beta)$ をもつ場合を考えればよい．このとき，

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{(-a)(x - \alpha)(\beta - x)} = \sqrt{-a}(x - \alpha)\sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}} \qquad (\alpha \leq x \leq \beta)$$

となり既に紹介した無理関数の不定積分に帰着され，$y = \sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}}$ とおくことにより有理関数の不定積分に帰着される．

例 5.8 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log\bigl(\sqrt{1+x^2}+x\bigr)+C$　（C は積分定数）

実際，$y=\sqrt{1+x^2}+x$ と置換しよう．このとき，$(y-x)^2=1+x^2$ より $2yx=y^2-1$．ゆえに，

$$x=\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right) \qquad \therefore \quad dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)dy=\frac{y^2+1}{2y^2}dy$$

また，

$$\sqrt{1+x^2}=y-x=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)=\frac{y^2+1}{2y}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{2y}{y^2+1}\frac{y^2+1}{2y^2}dy=\int\frac{dy}{y}\\ &=\log|y|+C=\log\bigl(\sqrt{1+x^2}+x\bigr)+C\end{aligned}$$

となる．

例 5.9 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt{1-x^2}+C$　（C は積分定数）

実際，$y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ と置換しよう．このとき，

$$x=\frac{y^2-1}{y^2+1}=1-\frac{2}{y^2+1} \qquad \therefore \quad dx=\frac{4y}{(y^2+1)^2}dy$$

したがって，

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx &= \int y\frac{4y}{(y^2+1)^2}dy=\int y\Bigl(-\frac{2}{y^2+1}\Bigr)'dy\\ &=-\frac{2y}{y^2+1}+2\int\frac{dy}{y^2+1}=-\frac{2y}{y^2+1}+2\arctan y+C\\ &=-\sqrt{1-x^2}+2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C\end{aligned}$$

となる．あるいは，少し工夫をして

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx &= \int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &=\int(\arcsin x)'dx+\int\bigl(-\sqrt{1-x^2}\bigr)'dx\\ &=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C\end{aligned}$$

と計算する方が賢いであろう．

問 5.13　次式で定められる関数 f の不定積分を計算せよ．ただし，a は正定数である．

(1)　$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$

(2)　$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}$

(3)　$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

5.6　広義積分

定義 5.6　f を半開区間 $[a,b)$（$b=\infty$ でもよい）で定義された関数で次の 2 条件を満たすとする．

(1)　任意の $c \in (a,b)$ に対して f は閉区間 $[a,c]$ で可積分である．

(2)　極限値 $S = \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx$ が存在する．

このとき，f は I で**広義積分可能**あるいは**広義可積分**であるという．また，S を f の I での**広義積分**といい，通常の積分と同じ記号を用いて $S = \int_a^b f(x)dx$ と書く．

同様にして，$I=(a,b], (a,b)$ の場合にも広義積分が定義される．広義積分および通常の積分に対して全く同じ積分記号を用いるので少々紛らわしいが，被積分関数の形を見ればどちらの意味で使われているかは分かるであろう．

例 5.10　(1)　$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ は半開区間 $(0,1]$ で連続であり，それゆえ定理 5.5 より $(0,1]$ に含まれる任意の閉区間で可積分である．また，$\varepsilon \in (0,1)$ に対して

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2(1-\sqrt{\varepsilon}) \to 2 \qquad (\varepsilon \to +0)$$

したがって，$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ は $(0,1]$ で広義可積分であり $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$ となる．

(2)　$f(x) = e^{-x}$ は半開区間 $[0,\infty)$ で連続であり，それゆえ定理 5.5 より $[0,\infty)$ に含まれる任意の閉区間で可積分である．また，$R>0$ に対して

$$\int_0^R e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^R = (1-e^{-R}) \to 1 \qquad (R \to +\infty)$$

したがって，$f(x) = e^{-x}$ は $[0,\infty)$ で広義可積分であり $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx = 1$ となる．

(3)　$f(x) = \frac{1}{x}$ は半開区間 $(0,1]$ で連続であり，それゆえ定理 5.5 より $(0,1]$ に含まれる任意の閉区間で可積分である．ところが，$\varepsilon \in (0,1)$ に対して

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = [\log x]_\varepsilon^1 = -\log\varepsilon \to +\infty \qquad (\varepsilon \to +0)$$

したがって，$f(x) = \frac{1}{x}$ は $(0,1]$ で広義可積分ではなく，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ は定義されない．

この例のように，不定積分を使って具体的に広義積分の値を計算できる場合には，極限操作を頭の中だけで行って紙の上では次のように計算する場合が多い．

(1)　$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$

(2)　$\int_0^\infty e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$

しかし，広義積分をしっかり理解していないうちは，面倒でも上の例における計算のように極限操作を省略せず丁寧に計算すべきである．

上の例では被積分関数の不定積分が計算できたので，広義可積分性を容易に判定することができた．次に，不定積分が初等関数で表せないような関数に対して広義可積分性を判定する定理を紹介しよう．そのために，数列に対する定理 1.8 の連続版と見なすことができる補題を 1 つ準備しておく．その証明はさほど難しくはないので，方針のみを説明し詳細は諸君に任せることにする．

補題 5.3　F を半開区間 $I=[a,b)$（$b=\infty$ でもよい）で定義された関数とする．このとき，極限値 $\lim_{x\to b-0}F(x)$ が存在するための必要十分条件は，任意の正数 ε に対して（b に十分近い）$c\in I$ が存在して，$c<x_1<x_2<b$ を満たす任意の x_1,x_2 に対して $|F(x_1)-F(x_2)|<\varepsilon$ が成り立つことである．

証明　必要条件であることは明らかであろう．十分条件については，まず b に収束する区間 I における数列 $\{x_n\}$ を構成する．例えば，b が実数の場合は $x_n:=\frac{1}{n}a+(1-\frac{1}{n})b$，$b=\infty$ の場合は $x_n:=a+n$ とおけばよい．このとき，数列 $\{F(x_n)\}$ は Cauchy 列であることが示され，収束することが分かる．その極限値を α とすれば，$\lim_{x\to b-0}F(x)=\alpha$ となることが分かる．(証明終)

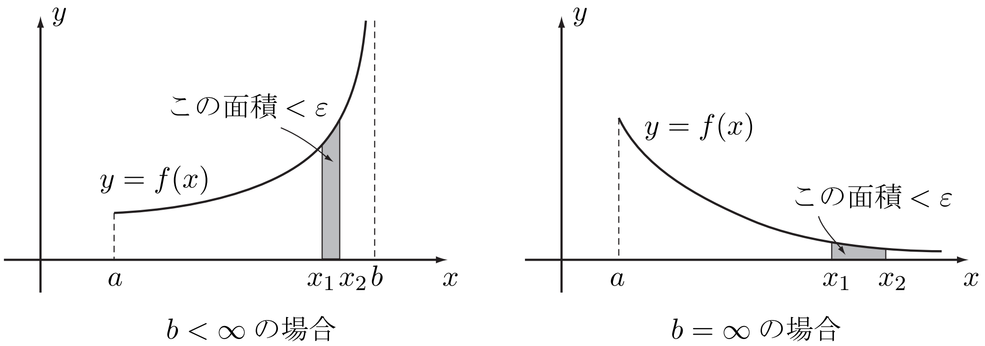
定理 5.16　f を半開区間 $I=[a,b)$（$b=\infty$ でもよい）で定義された連続関数とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

(1)　f は I で広義可積分である．

(2)　任意の正数 ε に対して $c\in I$ が存在して，$c<x_1<x_2<b$ を満たす任意の x_1,x_2 に対して

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}f(y)dy\right|<\varepsilon$$

が成り立つ．



証明　仮定および定理 5.5 より，任意の $x\in I$ に対して f は閉区間 $[a,x]$ で可積分であるから，$F(x):=\int_a^x f(y)dy$ により I 上の関数 F が定まる．このとき，f が I で広義可積分であるための必要十分条件は極限値 $\lim_{x\to b-0}F(x)$ が存在することである．このことと，補題 5.3 および

$$|F(x_1)-F(x_2)|=\left|\int_a^{x_1}f(y)dy-\int_a^{x_2}f(y)dy\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}f(y)dy\right|$$

に注意すればよい．(証明終)

例 5.11 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ は区間 $I=(0,\infty)$ で広義可積分である．

実際，$f(0)=1$ と定めると f は半開区間 $[0,\infty)$ で連続であるから，$x\to\infty$ での様子だけを調べればよい．$0<R_1<R_2<\infty$ とすると，部分積分より

$$\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{x}(-\cos x)'dx=\Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_{R_1}^{R_2}-\int_{R_1}^{R_2}\frac{\cos x}{x^2}dx$$

したがって，

$$\left|\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sin x}{x}dx\right|\le\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\int_{R_1}^{R_2}\frac{dx}{x^2}=\frac{2}{R_1}\to 0\qquad(R_1\to\infty)$$

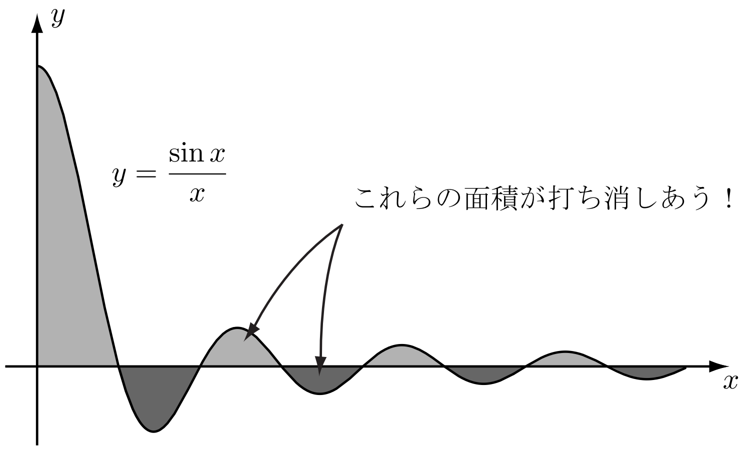
となる．それゆえ，定理 5.16 より広義可積分性が従う．この広義積分の値を微分積分の範疇で求めようとするとかなりの工夫を要するが，複素数を変数とするような関数を対象とする複素関数論を用いると

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

となることが容易に計算される．

なお，$f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ の場合，対応する極限は $+\infty$ に発散し I で広義可積分ではないことが確かめられる．このことを直感的に説明すると，$y=\frac{\sin x}{x}$ のグラフと x 軸とによって囲まれる部分について，$y\ge 0$ の部分の面積と $y\le 0$ の部分の面積が共に $+\infty$ であるのだが，$x\to+\infty$ のとき $y=\frac{\sin x}{x}$ は正負の値を振動しながらゆっくりと 0 に減衰しており，その振動のお陰で正の面積の部分と負の面積の部分が上手く打ち消しあって収束しているのである．

このように，正負の値を振動することによって初めてその広義積分が収束しているような場合には，上で示したように部分積分を使うと上手く広義可積分性が証明される．



問 5.14 次式で定められる関数 f が区間 $[0,\infty)$ で広義可積分であるかどうかを判定せよ．

(1) $f(x)=\frac{\cos x}{1+x}$

(2) $f(x)=\frac{x\sin^2 x}{1+x^2}$

(3) $f(x)=\sin(x^2)$

符号変化が重要でない場合の関数 f の区間 $I=[a,b)$ における広義可積分性の判定では，b が実数の場合は $x\to b-0$ のときの $f(x)$ の発散の速さが，$b=\infty$ の場合は $x\to+\infty$ のときの $f(x)$ の減衰の速さが重要な指標となる．そのことは次の例から理解されよう．

例 5.12　(1)　$f(x)=\frac{1}{(1-x)^\alpha}$ が半開区間 $[0,1)$ で広義可積分であるための必要十分条件は $\alpha<1$ である．実際，$\varepsilon\in(0,1)$ に対して

$$\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(1-x)^\alpha}=\begin{cases}\Big[-\dfrac{1}{1-\alpha}(1-x)^{1-\alpha}\Big]_0^{1-\varepsilon}=\dfrac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha}) & (\alpha\neq1)\\ \big[-\log(1-x)\big]_0^{1-\varepsilon}=-\log\varepsilon & (\alpha=1)\end{cases}$$
$$\to\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha} & (\alpha<1)\\ +\infty & (\alpha\geq1)\end{cases}\qquad(\varepsilon\to+0)$$

が成り立つことから分かる．

(2)　$f(x)=\frac{1}{x^\beta}$ が半開区間 $[1,\infty)$ で広義可積分であるための必要十分条件は $\beta>1$ である．実際，$R>1$ に対して

$$\int_1^R\frac{dx}{x^\beta}=\begin{cases}\big[\dfrac{1}{1-\beta}x^{1-\beta}\big]_1^R=\dfrac{1}{\beta-1}(1-R^{-(\beta-1)}) & (\beta\neq1)\\ \big[\log x\big]_1^R=\log R & (\beta=1)\end{cases}$$
$$\to\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-1} & (\beta>1)\\ +\infty & (\beta\leq1)\end{cases}\qquad(R\to+\infty)$$

が成り立つことから分かる．

この例を一般化したものとして，次の定理が成り立つ．

定理 5.17　f を半開区間 $I=[a,b)$ で定義された連続関数で次の条件を満たすとする．

(1)　$b<\infty$ の場合，ある $\alpha<1$ が存在して $f(x)=O((b-x)^{-\alpha})$ $(x\to b-0)$ が成り立つ．
(2)　$b=\infty$ の場合，ある $\beta>1$ が存在して $f(x)=O(x^{-\beta})$ $(x\to+\infty)$ が成り立つ．

このとき，f は I で広義可積分である．

証明　(1)　仮定より，ある定数 $\alpha<1$，十分大きな正数 C，および十分小さな正数 δ が存在し，$b-\delta<x<b$ を満たす任意の x に対して $|f(x)|\leq C(b-x)^{-\alpha}$ が成り立つ．したがって，$b-\delta<x_1<x_2<b$ とすると

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx\right|\leq\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx\leq C\int_{x_1}^{x_2}(b-x)^{-\alpha}dx$$
$$=\Big[-\frac{C}{1-\alpha}(b-x)^{1-\alpha}\Big]_{x_1}^{x_2}\leq\frac{C}{1-\alpha}(b-x_1)^{1-\alpha}\to0\qquad(x_1\to b-0)$$

となる．それゆえ，定理 5.16 より f は I で広義可積分である．

(2)　仮定より，ある定数 $\beta>1$，十分大きな正数 C および R が存在し，$x>R$ を満たす任意の x に対して $|f(x)|\leq Cx^{-\beta}$ が成り立つ．したがって，$R<x_1<x_2$ とすると

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx\right|\leq\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx\leq C\int_{x_1}^{x_2}x^{-\beta}dx$$
$$=\Big[-\frac{C}{\beta-1}x^{-(\beta-1)}\Big]_{x_1}^{x_2}\leq\frac{C}{\beta-1}x_1^{-(\beta-1)}\to0\qquad(x_1\to+\infty)$$

となる．それゆえ，定理 5.16 より f は I で広義可積分である．(証明終)

この定理 5.17 より，$f(x)$ の発散の速さおよび減衰の速さともに 1 次の速さが臨界次数であることが分かる．すなわち，端点で 1 次よりも遅い次数で発散している場合，また遠方で 1 次よりも速い次数で減衰している場合，f は広義可積分となるのである．

定理 5.16 および定理 5.17 は右端点が開いている半開区間 $[a,b)$ に対して広義可積分性を判定するものであるが，左端点が開いている半開区間 $(a,b]$ に対しても同様な定理が成り立つ．さらに開区間 (a,b) に対する広義積分については，その開区間を 2 つの区間 $(a,c]$ および $[c,b)$ に分解し，それぞれの区間に対してそれらの定理を適用すればよい．

例 5.13 $f(x)=\log(\sin x)$ とおくと，f は半開区間 $(0,\pi/2]$ 上の連続関数であり，l'Hôpital の定理（定理 3.9）より

$$\lim_{x\to+0}\frac{\log(\sin x)}{x^{-1/2}}=\lim_{x\to+0}\frac{\big(\log(\sin x)\big)'}{(x^{-1/2})'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}=-2\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{x}\cos x}{\frac{\sin x}{x}}=0$$

したがって，$x\to+0$ のとき $f(x)=o(x^{-1/2})$，特に $f(x)=O(x^{-1/2})$ となる．ゆえに，定理 5.17 より f は半開区間 $(0,\pi/2]$ で広義可積分であり，広義積分

$$S=\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)dx$$

が存在する．ここで，一般に

$$\int_0^{\pi/2}g(\sin x)dx=\int_0^{\pi/2}g(\cos x)dx,\qquad \int_0^{\pi}g(\sin x)dx=2\int_0^{\pi/2}g(\sin x)dx$$

が成り立つことに注意すると

$$\begin{aligned}2S&=\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)dx+\int_0^{\pi/2}\log(\cos x)dx=\int_0^{\pi/2}\log(\sin x\cos x)dx\\&=\int_0^{\pi/2}\log\Big(\frac{1}{2}\sin 2x\Big)dx=\int_0^{\pi/2}\big(\log(\sin 2x)-\log 2\big)dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log(\sin y)dy-\frac{\pi}{2}\log 2=S-\frac{\pi}{2}\log 2\end{aligned}$$

したがって，

$$\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)dx=-\frac{\pi}{2}\log 2$$

となる．最後に上式を導く際，広義可積分性より $S\neq\pm\infty$ が保証されていることを使っていることに注意しよう．

問 5.15 次式で定められる関数 f が区間 I で広義可積分であるかどうかを判定せよ．

(1) $f(x)=\frac{1}{\log(x+e)},\quad I=[0,\infty)$

(2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^5+1}},\quad I=[0,\infty)$

(3) $f(x)=\frac{\log x}{1-x},\quad I=(0,1)$

第6章　重積分

6.1　重積分の定義と基本性質

2 変数関数に対しては不定積分という概念が存在しない．それゆえ，不定積分を使って定積分を定義するという高校流の定義を 2 変数関数に拡張しようとすると，どうしたらよいか困るであろう．それに対して，前章で紹介した区分求積による Riemann 流の定積分の定義は，以下で見ていくように，2 変数関数に対して非常に容易に拡張することができる．

集合論では，２つの集合 X, Y に対してそれぞれの元 $x \in X, y \in Y$ の組 (x, y) 全体の集合を X と Y の**直積**といい $X \times Y$ と書く．この記号を用いると，平面上の長方形は次のように区間の直積で表される．

$$[a, b] \times [c, d] := \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

まずは，長方形の上で定義された関数の積分を定義しよう．

定義 6.1　f を長方形 $D = [a, b] \times [c, d]$ で定義された関数とする．

(1)　区間 $[a, b]$ および $[c, d]$ を分割することによって得られる長方形の**分割**

$$\Delta : \begin{array}{l} a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \\ c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = d \end{array}$$

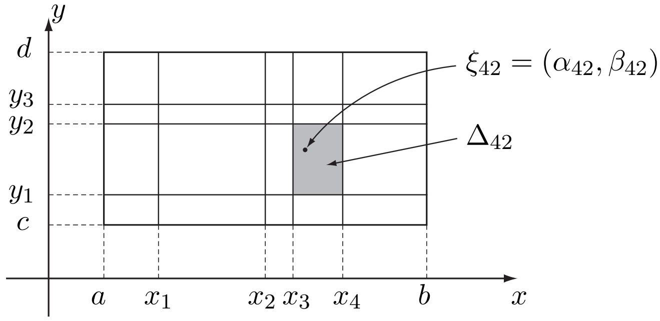
に対して，

$$\Delta_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$$

を分割 Δ の**小長方形**，

$$|\Delta| := \max\{x_i - x_{i-1},\ y_j - y_{j-1} \,|\, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

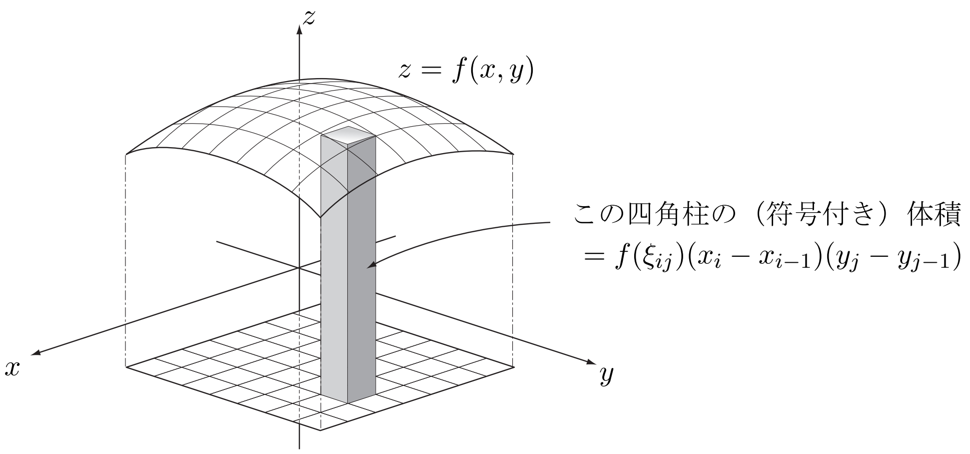
を分割 Δ の**幅**という．



(2)　$\xi = \{\xi_{ij} \,|\, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$，$\xi_{ij} = (\alpha_{ij}, \beta_{ij}) \in \Delta_{ij}$ に対して

$$S(f, \Delta, \xi) := \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} f(\xi_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

とおく．これを f の **Riemann 和**という．このとき，ξ_{ij} を Δ_{ij} の**代表元**という．



(3) f が D で **Riemann 可積分**あるいは単に**可積分**であるとは，$|\Delta| \to 0$ のとき f の Riemann 和 $S(f, \Delta, \xi)$ が分割 Δ および代表元の集合 ξ に無関係な数 $S(f)$ に収束するときをいう．このとき，

$$S(f) = \iint_D f(x, y)dxdy$$

と書き，これを f の D での**重積分**という．今の場合は 2 変数関数の積分を考えているので，これを **2 重積分**ともいう．

1 変数関数のときと同様に，長方形 $D = [a, b] \times [c, d]$ で定義された有界な関数 f に対して，それが可積分となるための条件を与えよう．D の任意の分割 Δ に対して，その小長方形 Δ_{ij} における f の下限および上限をそれぞれ

$$m_{ij} := \inf_{(x,y)\in\Delta_{ij}} f(x, y), \qquad M_{ij} := \sup_{(x,y)\in\Delta_{ij}} f(x, y)$$

とする．そして分割 Δ に関する関数 f の**不足和** $\underline{S}_\Delta(f)$ および**過剰和** $\overline{S}_\Delta(f)$ を

$$\underline{S}_\Delta(f) := \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$
$$\overline{S}_\Delta(f) := \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

により，また関数 f の**下積分** $\underline{S}(f)$ および**上積分** $\overline{S}(f)$ を

$$\underline{S}(f) := \sup\{\underline{S}_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathfrak{D}\}, \qquad \overline{S}(f) := \inf\{\overline{S}_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathfrak{D}\}$$

により定める．ただし，$\mathfrak{D}$ は長方形 D の分割 Δ 全体の集合である．このとき，1 変数関数のときと全く同様にして次の定理 6.1 および定理 6.2 を証明することができる．

定理 6.1（Darboux）　$\underline{S}(f) = \lim_{|\Delta|\to 0} \underline{S}_\Delta(f)$,　$\overline{S}(f) = \lim_{|\Delta|\to 0} \overline{S}_\Delta(f)$

定理 6.2　次の 3 条件 (1)–(3) は互いに同値である．

(1) 関数 f は長方形 D で可積分である．
(2) $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$　（Darboux の可積分条件）

(3)　任意の正数 ε に対して，長方形 D のある分割 Δ が存在して $0 \leq \overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \varepsilon$ となる．

連続関数の可積分性も 1 変数関数の場合と同じ方針で証明することができる．すなわち，まず始めに長方形 $D = [a,b] \times [c,d]$ で連続な関数は一様連続であることを証明する．その際，Bolzano–Weierstrass の定理を平面上の点列に対して拡張しておかなければならない．その一様連続性と定理 6.2 を用いれば望みの可積分性が示される．証明の詳細は余力のある諸君に委ねることにし，ここでは結果のみを定理の形で述べておく．

定理 6.3 長方形 $D = [a,b] \times [c,d]$ で連続な関数 f は D で可積分である．

定理 6.2 を用いれば，1 変数関数のときと全く同様にして次の定理を証明することができる．

定理 6.4 f, g を長方形 $D = [a,b] \times [c,d]$ で有界かつ可積分な関数とし，α, β を定数とする．このとき，$\alpha f + \beta g$ および $|f|$ もまた D で可積分であり次式が成り立つ．

$$\iint_D \big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\big) dxdy = \alpha \iint_D f(x,y) dxdy + \beta \iint_D g(x,y) dxdy \qquad \text{（積分の線形性）}$$

$$\left| \iint_D f(x,y) dxdy \right| \leq \iint_D |f(x,y)| dxdy$$

さらに，$f(x,y) \leq g(x,y)$ $(\forall (x,y) \in D)$ ならば次式が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y) dxdy \leq \iint_D g(x,y) dxdy \qquad \text{（積分の単調性）}$$

1 変数関数の場合には，区間の上の積分を考えれば十分である．それに対して平面上には長方形だけではなく多角形や楕円など様々な形の領域があり，応用上その様な一般の集合の上で定義された関数の積分を考える必要がある．そこで，一般の有界集合 D での積分を定義しよう．なお，$\mathbf{R}^2$ の集合 D が**有界**であるとは，D が原点を中心とする十分大きな半径 R の円 $B_R(0,0)$ に含まれるときをいう．

定義 6.2 f を $\mathbf{R}^2$ の有界集合 D で定義された関数とする．

(1)　長方形 $K = [a,b] \times [c,d]$ を $D \subset K$ を満たすように取り，関数 f を集合 D の外側に零拡張した関数を f^* とする．

$$f^*(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \big((x,y) \in D\big) \\ 0 & \big((x,y) \in K \setminus D\big) \end{cases}$$

この関数 f^* が（定義 6.1 の意味で）K で可積分であるとき，f は D で**可積分**であるという．このとき，

$$\iint_D f(x,y) dxdy := \iint_K f^*(x,y) dxdy \tag{6.1}$$

と書き，これを f の D での**重積分**あるいは**2 重積分**という．

(2)　定数関数 $f(x,y) \equiv 1$ が D で可積分であるとき D は**面積をもつ**といい，D の**面積** $\mu(D)$ を次式で定める．

$$\mu(D) := \iint_D 1 dxdy \tag{6.2}$$

この定義では集合 D を含む長方形 K を用いて間接的に可積分性と重積分を定義しているが，これらの定義は K の選び方に無関係であることが示される.（このようなとき，その定義は well-defined であると言う.）

関数 f の集合 D での重積分は，直感的には 3 次元空間内における曲面 $z = f(x, y)$ と xy 平面とに挟まれる部分の（符号付き）体積である．そう思うと，(6.1) 式が成り立つのは当然のことであって，それを定義とするのは奇妙に思えるかもしれない．しかし，一般の有界集合での重積分が定義されていない段階で (6.1) 式を証明することなどできる訳がない．それを逆手にとって，当然成り立つべきだと期待される (6.1) 式を定義としているのである.

同様に，面積というものが既に定義されているならば (6.2) 式も自明な式と思えるであろう．しかし，面積とは何か? という問の答えはそう簡単ではない．そこで，ここでも自明だと思える (6.2) 式を面積の定義としているのである.

次の定理が成り立つことも直感的には自明であろう．その証明は余力のある諸君に残しておこう.

定理 6.5 D_1, D_2 を $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ を満たす $\mathbf{R}^2$ の有界集合とし，f を D_1 および D_2 で可積分な関数とする．このとき，f は $D_1 \cup D_2$ でも可積分であり次式が成り立つ.

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \qquad \text{（積分の加法性）}$$

6.2 重積分と累次積分の関係

1 変数関数の積分を計算することは，微分積分学の基本公式により不定積分を計算することに帰着された．しかし，2 変数関数に対しては不定積分という概念が存在しないので，不定積分を使って重積分を計算することはできない．その代わりに，1 変数関数としての積分を 2 回繰り返すことによって重積分の値を計算することができる．そのような繰り返しの積分は**累次積分**あるいは**逐次積分**と呼ばれている.

定理 6.6（累次積分）　f を長方形 $D = [a, b] \times [c, d]$ で可積分な関数とする.

(1) 任意の $x \in [a, b]$ を固定するごとに $f(x, y)$ が y の関数として閉区間 $[c, d]$ で可積分であれば，$\displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$ は x の関数として閉区間 $[a, b]$ で可積分であり次式が成り立つ.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \quad \left(=: \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \right) \tag{6.3}$$

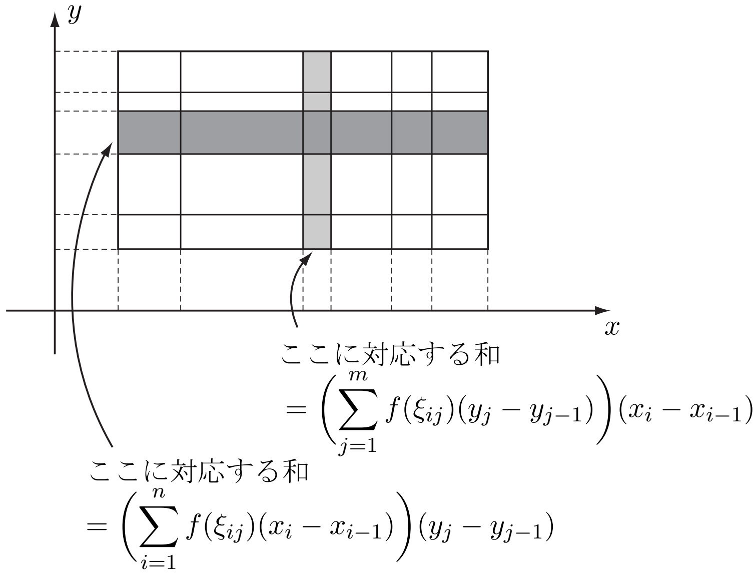
(2) 任意の $y \in [c, d]$ を固定するごとに $f(x, y)$ が x の関数として閉区間 $[a, b]$ で可積分であれば，$\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ は y の関数として閉区間 $[c, d]$ で可積分であり次式が成り立つ.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \quad \left(=: \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \right) \tag{6.4}$$

(3) f が D で連続であれば (6.3) 式および (6.4) 式が成り立つ.

(6.3) 式および (6.4) 式は以下のようにして直感的に理解される．Riemann 和 $S(f,\Delta,\xi)$ における和を，最初に j それから i についての和に，あるいは最初に i それから j についての和に書き直そう．

$$S(f,\Delta,\xi)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}f(\xi_{ij})(y_j-y_{j-1})\right)(x_i-x_{i-1})$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}f(\xi_{ij})(x_i-x_{i-1})\right)(y_j-y_{j-1})$$



ここで，i および j についての和はそれぞれ x および y に関する Riemann 和の形になっていることに注目しよう．そこで $|\Delta|\to 0$ とすれば，i および j についての和の部分がそれぞれ x および y に関する積分に収束し (6.3) 式および (6.4) 式が導かれるのである．

定理 6.6 の証明　(1) を示そう．$F(x):=\int_c^d f(x,y)dy$ により，閉区間 $[a,b]$ で定義された関数 F が定まる．この関数 F が閉区間 $[a,b]$ で可積分であり，その積分が f の D での重積分に一致することを示せばよい．$\Delta_1: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ を区間 $[a,b]$ の任意の分割とし，$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ を代表元の集合とする．このとき，対応する F の Riemann 和は

$$S(F,\Delta_1,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}F(\alpha_i)(x_i-x_{i-1}) \tag{6.5}$$

となる．次に，区間 $[c,d]$ を（Δ_1 の分割数と合わせて）n 等分割して長方形 $D=[a,b]\times[c,d]$ の分割

$$\Delta:\ \begin{array}{l} a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b \\ c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=d \end{array}$$

を定め，$m_{ij}:=\inf_{(x,y)\in\Delta_{ij}}f(x,y)$ および $M_{ij}:=\sup_{(x,y)\in\Delta_{ij}}f(x,y)$ とおく．ここで，

$$F(\alpha_i)=\int_c^d f(\alpha_i,y)dy=\sum_{j=1}^{n}\int_{y_{j-1}}^{y_j}f(\alpha_i,y)dy$$

であることに注意しよう．$y_{j-1} \leq y \leq y_j$ のとき，$(\alpha_i, y) \in \Delta_{ij}$ であるから $m_{ij} \leq f(\alpha_i, y) \leq M_{ij}$ が成り立つ．この辺々を y について区間 $[y_{j-1}, y_j]$ で積分してから j についての和をとれば

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{n} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\alpha_i, y)dy = F(\alpha_i) \leq \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

となる．さらに，この辺々に $x_i - x_{i-1}$ を掛けてから i についての和をとれば，(6.5) 式より

$$\underline{S}_\Delta(f) \leq S(F, \Delta_1, \alpha) \leq \overline{S}_\Delta(f)$$

となる．ここで，分割 Δ の定め方より $|\Delta_1| \to 0$ のとき $|\Delta| \to 0$ であり，仮定より f は D で可積分であるから，定理 6.1 および定理 6.2 より，

$$\underline{S}_\Delta(f), \overline{S}_\Delta(f) \to \iint_D f(x, y)dxdy \qquad (|\Delta_1| \to 0)$$

となる．したがって，はさみうちの定理より $|\Delta_1| \to 0$ のとき $S(F, \Delta_1, \alpha)$ は $\iint_D f(x, y)dxdy$ に収束する．それゆえ，F は $[a, b]$ で可積分であり

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_a^b F(x)dx = \iint_D f(x, y)dxdy$$

となることが従う．全く同様にして (2) も示される．(3) については，f が D で連続であれば (1) および (2) における仮定が満たされることに注意すればよい．(証明終)

例 6.1　$f(x, y) = (x + y)^2$ は長方形 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ で連続であるから，

$$\begin{aligned}
\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x+y)^2 dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}(x+y)^3 \right]_{x=0}^1 dy \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 \left((1+y)^3 - y^3 \right) dy = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4}\left((1+y)^4 - y^4 \right) \right]_0^1 \\
&= \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

となる．

f を長方形 $D = [a, b] \times [c, d]$ で定義された連続関数とすると，定理 6.6 (3) より次式が成り立つ．

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy \quad \left(= \iint_D f(x, y)dxdy \right)$$

これは累次積分の順序交換に関する公式である．このように f が連続関数であれば，何も気にすることなく積分の順序を交換しても構わない．しかし f が D で可積分でないような場合には，たとえ 2 つの累次積分が共に計算できたとしても，それらの値が一致するとは限らないことに注意しよう．よく引き合いに出されるのが次の例である．

例 6.2　$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ より

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dy = \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^1 = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\therefore \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \left[\arctan x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

また被積分関数の x と y に関する対称性に注目すれば（あるいは全く同様に計算することにより）

$$\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy=-\frac{\pi}{4}$$

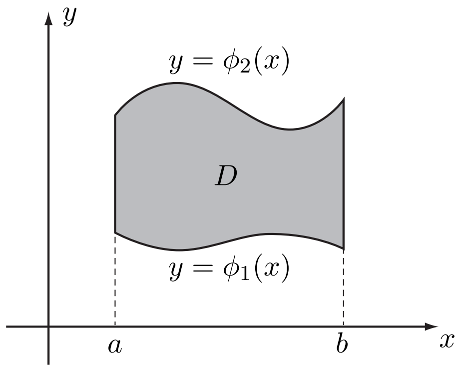
となることが分かる．したがって，

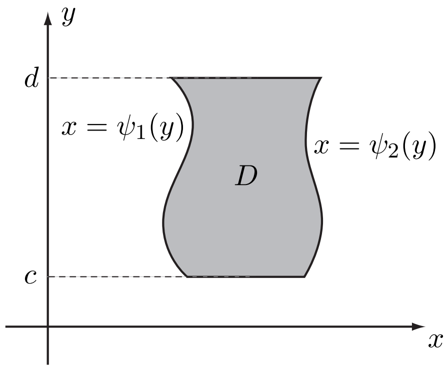
$$\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx \neq \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy$$

であり，この累次積分に対しては積分の順序を交換できない．なお，関数 $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ は $[0,1]\times[0,1]$ で可積分でなく，それゆえ重積分 $\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$ は定義されていない．

次に積分範囲 D が連続曲線 $y=\phi_1(x)$ および $y=\phi_2(x)$ で挟まれた部分，あるいは連続曲線 $x=\psi_1(y)$ および $x=\psi_2(y)$ で挟まれた部分であるときの累次積分を紹介しよう．応用ではそのような形の重積分を計算する場合が多い．その前に補題を 1 つ紹介しておく．その証明は少々技巧的であるから割愛する．

補題 6.1　D を $\mathbf{R}^2$ の集合で $D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\,\phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\}$ あるいは $D=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d,\,\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$ という形をしているとする．ここで，ϕ_1,ϕ_2 は閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数で $\phi_1(x)\le\phi_2(x)$ $(\forall x\in[a,b])$ を満たし，ψ_1,ψ_2 は閉区間 $[c,d]$ で定義された連続関数で $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$ $(\forall y\in[c,d])$ を満たすとする．このとき，D で連続な関数 f は D で可積分である．





定理 6.7　(1)　ϕ_1,ϕ_2 を閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数で $\phi_1(x)\le\phi_2(x)$ $(\forall x\in[a,b])$ を満たすとし，$D:=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\,\phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\}$ とおく．このとき，D で定義された連続関数 f に対して次式が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx \quad \left(=:\int_a^b dx\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy\right) \tag{6.6}$$

(2)　ψ_1,ψ_2 を閉区間 $[c,d]$ で定義された連続関数で $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$ $(\forall y\in[c,d])$ を満たすとし，$D:=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d,\,\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$ とおく．このとき，D で定義された連続関数 f に対して次式が成り立つ．

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy \quad \left(=:\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right) \tag{6.7}$$

証明　(1) を示そう．補題 6.1 より f は D で可積分である．したがって，$D \subset K$ を満たすような長方形 $K = [a,b] \times [c,d]$ を取り，

$$f^*(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \big((x,y) \in D\big) \\ 0 & \big((x,y) \in K \setminus D\big) \end{cases}$$

とおくと，定義より f^* は K で可積分であり

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_K f^*(x,y)dxdy$$

が成り立つ．ここで，任意の $x \in [a,b]$ を固定するごとに $f^*(x,y)$ は y の関数として区間 $[c,\phi_1(x)]$，$[\phi_1(x),\phi_2(x)]$，$[\phi_2(x),d]$ それぞれにおいて可積分である．実際，y の関数 $f^*(x,y)$ は区間 $[c,\phi_1(x))$ および $(\phi_2(x),d]$ では恒等的に 0 であるから区間 $[c,\phi_1(x)]$ および $[\phi_2(x),d]$ で可積分であり，区間 $[\phi_1(x),\phi_2(x)]$ では連続関数であるから定理 5.4 よりその可積分性が従う．ゆえに，それらを合わせた区間 $[c,d]$ でも可積分であり，

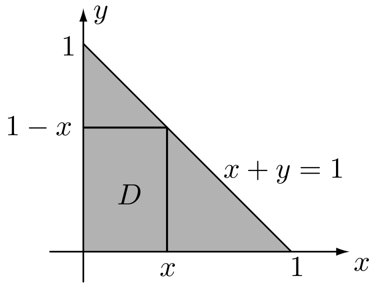
$$\begin{aligned}\int_c^d f^*(x,y)dy &= \int_c^{\phi_1(x)} f^*(x,y)dy + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x,y)dy + \int_{\phi_2(x)}^{d} f^*(x,y)dy \\ &= \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy\end{aligned}$$

となる．したがって，定理 6.6 (1) より

$$\iint_K f^*(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f^*(x,y)dy\right)dx = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

となり (6.6) 式が従う．全く同様にして (2) も示される．(証明終)

例 6.3　関数 $f(x,y) = x^2 + y^2$ の $D = \{(x,y) \,|\, x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ での重積分を計算しよう．



$D = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ と書き直せることに注意して定理 6.7 (1) を適用すれば，

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2+y^2)dy\right)dx = \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3\right)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}(1-x)^4\right]_0^1 = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

となる．重積分を累次積分に書き直す際には，この例のように，まず積分範囲を図示して定理 6.7 における関数 ϕ_1, ϕ_2 あるいは ψ_1, ψ_2 を間違いなく求めることがコツである．

関数 f が具体的に与えられたとき，y に関する不定積分が初等関数として求まらず，それゆえ (6.6) 式の右辺を計算できないのであるが，(6.7) 式の右辺における x に関する積分を先に計算しておくと，その後の y に関する積分も計算できてしまう場合がある．重積分を累次積分に書き直す際，x に関して先に積分するか，あるいは y に関して先に積分するかの選択は，被積分関数の形をよく見てどちらの方が計算が簡単になるかを見定めてから行うようにしよう．

問 6.1　次式で定められる関数 f の D での重積分を計算せよ．

(1)　$f(x,y) = x+y$，D は直線 $y=x$ および曲線 $y=x^2$ で囲まれる部分
(2)　$f(x,y) = \frac{y\sin x}{x}$，$D$ は $(x,y) = (0,0), (\pi,0), (\pi,\pi)$ を頂点とする三角形の内部
(3)　$f(x,y) = x^y$，D は直線 $x=0,1$，$y=1,2$ で囲まれる正方形の内部

$\mathbf{R}^2$ の集合 D が連続関数 ϕ_1, ϕ_2 を用いて $D = \{(x,y)\,|\,a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$ と書けると同時に連続関数 ψ_1, ψ_2 を用いて $D = \{(x,y)\,|\,c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$ とも書けるとき，定理 6.7 より D で定義された任意の連続関数 f に対して次式が成り立つ．

$$\int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy \quad \left(= \iint_D f(x,y)dxdy \right)$$

これは積分の順序交換に関する公式である．D が長方形の場合，積分の順序交換を行うときに積分範囲をそれほど気にする必要はなかったが，そうでない場合には上のように積分範囲ががらりと変わってしまう．積分の順序交換を行うとき，この積分範囲を間違えてしまう人が少なくないので十分に注意しよう．

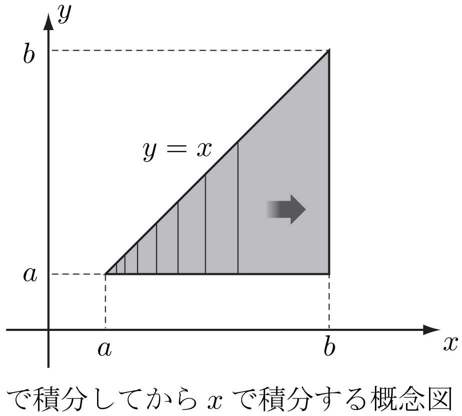
例 6.4　f を $\mathbf{R}^2$ で定義された連続関数とし，$a<b$ とする．このとき，累次積分 $\int_a^b \bigl(\int_a^x f(x,y)dy \bigr) dx$ の積分順序を交換しよう．この累次積分を重積分に書き直したときの積分範囲 D は

$$D = \{(x,y)\,|\,a \le x \le b, a \le y \le x\} = \{(x,y)\,|\,a \le y \le b, y \le x \le b\}$$

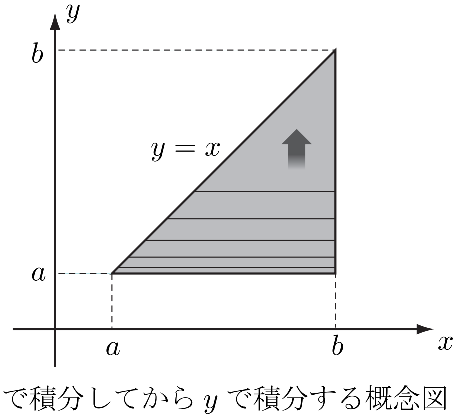
であるから，定理 6.7 より次式が得られる．

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x,y)dy \right) dx = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_y^b f(x,y)dx \right) dy$$

左辺の y に関する積分範囲が $[a,x]$ であるのに対し，右辺の x に関する積分範囲が $[y,b]$ であることに注意しよう．これら 2 つの累次積分の計算過程の概念図を描いておく．



y で積分してから x で積分する概念図



x で積分してから y で積分する概念図

さらに，上の積分の順序交換における被積分関数として x に無関係な関数 $f = f(y)$ を取ると

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(y)dx \right) dy = \int_a^b (b-y)f(y)dy$$

となる．この式自体は部分積分法を用いて導くことができるが，このように 2 変数関数の積分法を用いても得られる．

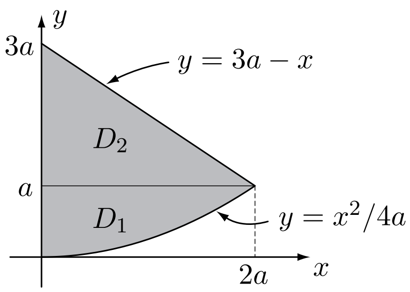
例 6.5　f を $\mathbf{R}^2$ で定義された連続関数とし，$a > 0$ とする．このとき，累次積分

$$I = \int_0^{2a} \left(\int_{x^2/4a}^{3a-x} f(x,y)dy \right) dx$$

の積分順序を交換しよう．この累次積分を重積分に書き直したときの積分範囲は，$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \le y \le a, 0 \le x \le 2\sqrt{ay}\}$ および $D_2 = \{(x,y) \mid a \le y \le 3a, 0 \le x \le 3a-y\}$ を用いて $D = D_1 \cup D_2$ と書ける．したがって，

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \\ &= \int_0^a \left(\int_0^{2\sqrt{ay}} f(x,y)dx \right) dy + \int_a^{3a} \left(\int_0^{3a-y} f(x,y)dx \right) dy \end{aligned}$$

となる．



このように積分範囲が複雑な場合には，累次積分の積分順序を交換すると複数の累次積分の和になるときがある．

問 6.2　次の累次積分の積分順序を交換せよ．ただし，a は正定数，f は連続関数である．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy \right) dx$

(2) $\displaystyle\int_0^a \left(\int_x^{2x} f(x,y)dy \right) dx$

(3) $\displaystyle\int_0^a \left(\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{a-y} f(x,y)dx \right) dy$

6.3　積分変数の変換と Jacobian

1 変数関数の積分に対しては，置換積分法 $\displaystyle\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$ があった．これが非常に有用な計算法であることは説明するまでもないであろう．この節では，このような積分変

数の変換を重積分に対して拡張する．1 変数関数の場合 $x = \phi(t)$ と置換したとき $dx = \phi'(t)dt$ という式を用いたが，重積分のときにこの式に対応する式は何であろうか？結果から言うと，それは次の Jacobian（ヤコビアン）を使って書き表せる．

定義 6.3（Jacobian）　$\phi = \phi(u,v), \psi = \psi(u,v)$ を $\mathbf{R}^2$ の開集合 D で定義された C^1 級関数とする．このとき，D で定義された関数

$$\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)} := \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}$$

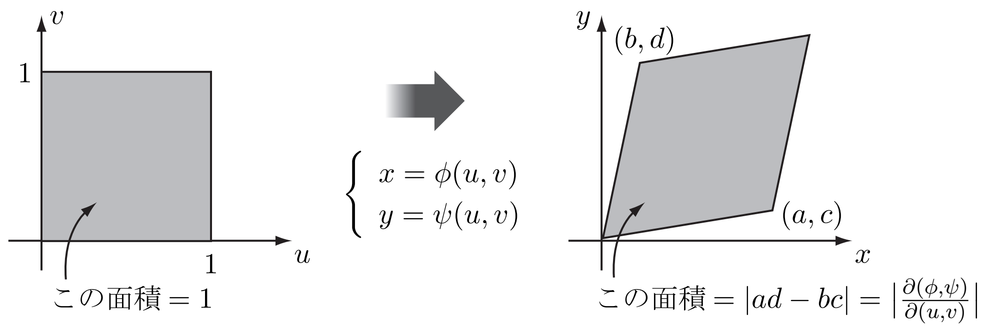
を (ϕ,ψ) の**関数行列式**あるいは**Jacobian** という．これは $\frac{D(\phi,\psi)}{D(u,v)}$ あるいは $J(u,v)$ とも書かれる．

これらの関数 ϕ,ψ を用いて，uv 平面上の集合 D から xy 平面への写像 $x = \phi(u,v), y = \psi(u,v)$ を考えているとき，この Jacobian は $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ とも書かれる．

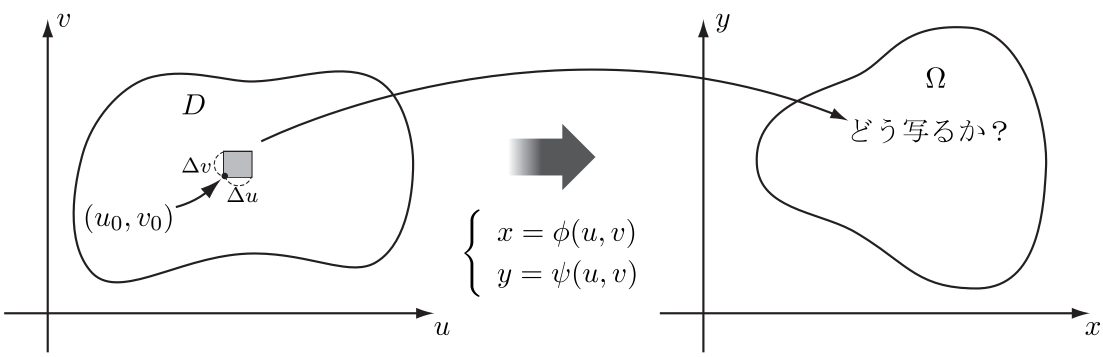
例 6.6　a,b,c,d を定数とする．1 次変換 $\phi(u,v) = au + bv, \psi(u,v) = cu + dv$ の Jacobian は

$$\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

となる．uv 平面上の正方形はこの 1 次変換 $x = \phi(u,v), y = \psi(u,v)$ により xy 平面上の平行四辺形に写されるが，(ϕ,ψ) の Jacobian はその uv 平面上の正方形の面積と xy 平面上の平行四辺形の面積の比を表している．



次に，ϕ,ψ が一般の C^1 級関数の場合，(ϕ,ψ) の Jacobian が何を表しているのかを見ていこう．そのために，uv 平面上の点 $\mathrm{A}(u_0,v_0), \mathrm{B}(u_0+\Delta u, v_0), \mathrm{C}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v), \mathrm{D}(u_0, v_0+\Delta v)$ を頂点とし一辺の長さが $\Delta u, \Delta v$ である微小な長方形 ABCD を考え，それが写像 $x = \phi(u,v), y = \psi(u,v)$ により xy 平面上のどのような集合に写されるかを考えよう．



この写像による点 A, B, C, D の像を，それぞれ A′, B′, C′, D′ としよう．

$$\mathrm{A}'\big(\phi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0)\big),\quad \mathrm{B}'\big(\phi(u_0+\Delta u,v_0),\psi(u_0+\Delta u,v_0)\big),\quad \text{etc.}$$

ここで Taylor の定理（定理 3.13）より，$\Delta u \to 0$ のとき

$$\begin{aligned}\phi(u_0+\Delta u,v_0) &= \phi(u_0,v_0)+\phi_u(u_0,v_0)\Delta u+o(\Delta u)\\ \psi(u_0+\Delta u,v_0) &= \psi(u_0,v_0)+\psi_u(u_0,v_0)\Delta u+o(\Delta u)\end{aligned}$$

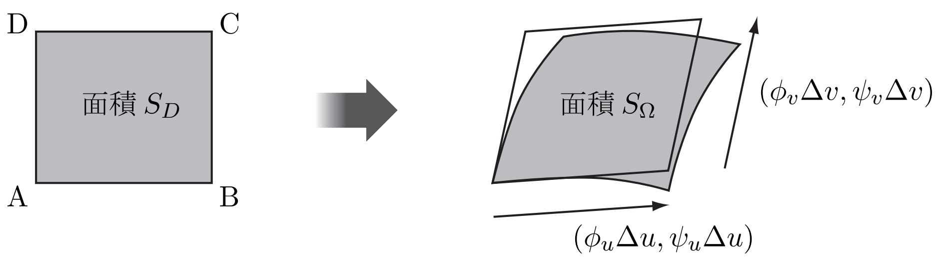
であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = \big(\phi_u(u_0,v_0)\Delta u,\psi_u(u_0,v_0)\Delta u\big)+o(\Delta u)\quad (\Delta u\to 0)$$

となる．同様にして，$(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{D'C'}} &= \big(\phi_u(u_0,v_0)\Delta u,\psi_u(u_0,v_0)\Delta u\big)+o\Big(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\Big)\\ \overrightarrow{\mathrm{A'D'}} &= \big(\phi_v(u_0,v_0)\Delta v,\psi_v(u_0,v_0)\Delta v\big)+o(\Delta v)\\ \overrightarrow{\mathrm{B'C'}} &= \big(\phi_v(u_0,v_0)\Delta v,\psi_v(u_0,v_0)\Delta v\big)+o\Big(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\Big)\end{aligned}$$

となる．したがって，$o\Big(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\Big)$ 程度の誤差を無視すれば，その写像による長方形 ABCD の像は 2 つのベクトル $\big(\phi_u(u_0,v_0)\Delta u,\psi_u(u_0,v_0)\Delta u\big)$ および $\big(\phi_v(u_0,v_0)\Delta v,\psi_v(u_0,v_0)\Delta v\big)$ が形成する平行四辺形で近似されることが分かる．



そこで uv 平面上の長方形 ABCD の面積を S_D，xy 平面上におけるその像の面積を S_Ω とすると，

$$S_\Omega \simeq \left|\det\begin{pmatrix}\phi_u\Delta u & \phi_v\Delta v\\ \psi_u\Delta u & \psi_v\Delta v\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}\Delta u\Delta v\right| = \left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|S_D$$

となる．実際，ϕ,ψ に対する適当な仮定のもと

$$\lim_{(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)}\frac{S_\Omega}{S_D} = \left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|$$

が成り立つことが示される．すなわち，(ϕ,ψ) の Jacobian は写像 $x=\phi(u,v), y=\psi(u,v)$ によって写される微小部分の面積比を表している．これより，

$$dxdy = \left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

と書くことの妥当性が理解されよう．

重積分に対する変数変換の公式を厳密に述べるために，幾つかの言葉を定義しておく．

定義 6.4　D を $\mathbf{R}^2$ の集合とし，$(a,b)\in\mathbf{R}^2$ とする．

(1)　(a,b) が D の**触点**であるとは，ある D 内の点列 $\{(x_n,y_n)\}$ が存在して $\|(x_n,y_n)-(a,b)\|\to 0$ $(n\to\infty)$ が成り立つときをいう．D の触点全体の集合を $\overline{D}$ と書き D の**閉包**という．

(2)　D が**閉領域**であるとは，ある $\mathbf{R}^2$ の領域（連結な開集合）D_0 が存在して $D=\overline{D_0}$ が成り立つときをいう．

(3)　閉領域 D で定義された関数 f が D で $\boldsymbol{C^n}$ **級**であるとは，f は D を含む領域 D_1 にその定義域を拡張することができ，かつ f は D_1 で C^n 級であるときをいう．

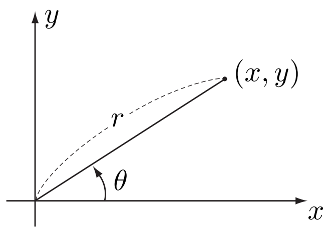
集合 D の閉包とは，直感的には D にその境界を加えた集合のことである．例えば，$\mathbf{R}^2$ の開円板 $B_r(a,b)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,\|(x,y)-(a,b)\|<r\}$ の閉包は $\overline{B_r(a,b)}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,\|(x,y)-(a,b)\|\leq r\}$ である．

以上の準備の下，重積分に対する変数変換の公式を述べよう．その証明は少々面倒であるから，ここでは割愛することにする．

定理 6.8（重積分の変数変換公式）　D,Ω を $\mathbf{R}^2$ の有界な閉領域で面積をもつとし，ϕ,ψ を D で C^1 級の関数とする．また，$x=\phi(u,v), y=\psi(u,v)$ は D から Ω への全単射な写像で，その Jacobian は D の各点で $\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}\neq 0$ を満たすとする．このとき，Ω で定義された任意の連続関数 f に対して次式が成り立つ．

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\iint_D f(\phi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

例 6.7（極座標変換）　$0<a<b<\infty$ とし，$\Omega=\{(x,y)\,|\,x,y\geq 0, a^2\leq x^2+y^2\leq b^2\}$ とする．被積分関数の形にもよるが，このような集合上での重積分を計算する際は極座標系 (r,θ) を用いると積分範囲が簡単になる．

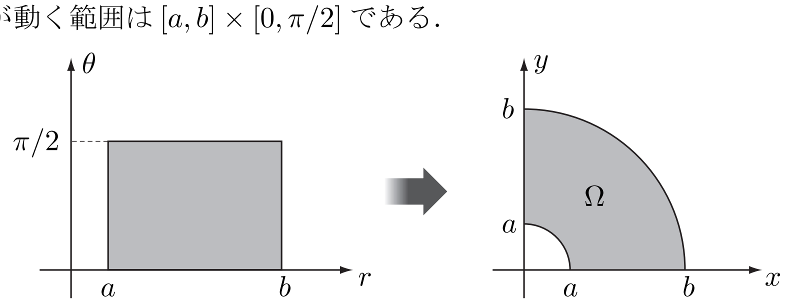


$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}\qquad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=y/x \end{cases}$$

このときの Jacobian は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r\neq 0$$

であり，(r,θ) が動く範囲は $[a,b]\times[0,\pi/2]$ である．



したがって，定理 6.8 より任意の連続関数 f に対して

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_0^{\pi/2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta\right) rdr$$

が成り立つ．さらに，この式で $a \to +0$ の極限をとれば

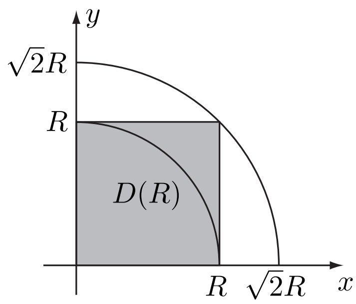
$$\iint_{B_b(0,0)} f(x,y)dxdy = \int_0^b \left(\int_0^{\pi/2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta\right) rdr$$

となる．この積分変数の極座標系への変換の際，Jacobian r を掛け忘れてしまう人が少なくない．気を付けるようにしよう．

例 6.8　$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となることを示そう．e^{-x^2} の原始関数は初等関数では求まらないので工夫する必要がある．正数 R に対して $I_R := \int_0^R e^{-x^2}dx$ とおくと，

$$I_R^2 = \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^R e^{-y^2}dy\right) = \int_0^R \left(\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}dx\right)dy = \iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

となる．ただし，$D(R) = [0,R]\times[0,R]$ である．ここで，$\Omega(R) := \{(x,y)\,|\,x,y \geq 0, x^2+y^2 \leq R^2\}$ とおくと，$\Omega(R) \subset D(R) \subset \Omega(\sqrt{2}R)$ なる包含関係が成り立つ．



したがって，

$$\iint_{\Omega(R)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \iint_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \iint_{\Omega(\sqrt{2}R)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \tag{6.8}$$

となる．ここで，積分変数を極座標系に変換すると例 6.7 より

$$\iint_{\Omega(R)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} e^{-r^2}d\theta\right) rdr = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$$

それゆえ (6.8) 式より

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-e^{-R^2})^{1/2} \leq I_R \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-e^{-2R^2})^{1/2}$$

が従う．ここで $R \to \infty$ とすれば，はさみうちの定理より

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{R\to\infty} I_R = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

が得られる．

問 6.3　以下で定められる関数 f の Ω での重積分を計算せよ．ただし，a, p, q は正定数である．

(1)　$f(x,y) = xy$，$\Omega = \{(x,y)\,|\,x,y \geq 0, x^2+y^2 \leq a^2\}$
(2)　$f(x,y) = px^2+qy^2$，$\Omega = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leq a^2\}$
(3)　$f(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2}$，$\Omega = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leq 2ax\}$

第7章　級数と関数の極限

7.1　級数の収束判定法

定義 7.1　数列 $\{a_n\}$ から作られる形式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

を**級数**あるいは**無限級数**といい，$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ をその級数の**第 n 部分和**という．数列 $\{s_n\}$ が A に収束するとき，その級数は A に**収束する**といい $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ と書く．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ はしばしば $\sum a_n$ と略記される．また，正数列 $\{a_n\}$ に対する級数 $\sum a_n$ を**正項級数**という．

定理 7.1　級数 $\sum a_n$ が収束するための必要十分条件は，任意の正数 ε に対してある自然数 n_0 が存在し，$n > m \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n, m に対して

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon$$

が成り立つことである．

証明　級数 $\sum a_n$ が収束するとは，その第 n 部分和からなる数列 $\{s_n\}$ が収束することであり，定理 1.8 よりそれは $\{s_n\}$ が Cauchy 列であることと必要十分である．すなわち，任意の正数 ε に対してある自然数 n_0 が存在し，$n > m \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n, m に対して $|s_n - s_m| < \varepsilon$ が成り立つことと必要十分である．ここで

$$\begin{aligned} s_n - s_m &= (a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) - (a_1 + \cdots + a_m) \\ &= a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n \end{aligned}$$

に注意すれば望みの結果が従う．(証明終)

定理 7.2　級数 $\sum a_n$ が収束すれば数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する．

証明　定理 7.1 において，特に $n = m + 1$ とすると，任意の正数 ε に対してある自然数 n_0 が存在し，$n > n_0$ を満たす任意の自然数 n に対して $|a_n| < \varepsilon$ となる．これは数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束することに他ならない．(証明終)

この定理 7.2 の逆は成り立たないことに注意しよう．例えば，$a_n = \frac{1}{n}$ により定まる数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束するが，対応する級数 $\sum \frac{1}{n}$ は $+\infty$ に発散する．問 1.10 を参照せよ．

定義 7.2　(1)　$\sum |a_n|$ が収束するとき，$\sum a_n$ は**絶対収束**するという．

(2)　$\sum a_n$ は収束するが絶対収束しないとき，$\sum a_n$ は**条件収束**するという．

定理 7.3 絶対収束する級数は収束する．

証明 級数 $\sum a_n$ は絶対収束するとしよう．このとき級数 $\sum |a_n|$ は収束するので定理 7.1 より，任意の正数 ε に対してある自然数 n_0 が存在し，$n > m \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n, m に対して $\big||a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n|\big| < \varepsilon$ となり，特に

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon$$

が成り立つ．したがって，再び定理 7.1 より級数 $\sum a_n$ は収束することが従う．（証明終）

次の定理が成り立つことも定理 7.1 から容易に示される．その証明は問として残しておこう．

定理 7.4 級数 $\sum a_n, \sum b_n$ は次の 2 条件を満たすとする．

(1) ある自然数 n_0 が存在して，$|a_n| \leq b_n$ $(\forall n \geq n_0)$ となる
(2) $\sum b_n$ は収束する

このとき，$\sum a_n$ は絶対収束する．

問 7.1 定理 7.4 を証明せよ．

有限個の数の和については，足し合わせる順番をどのように入れ換えてもその値が変わることはなかった．ところが，無限個の数の和である級数については，足し合わせる順番を入れ換えるとその値が変わってしまうことがあるので注意しなければならない．より具体的には次の定理が成り立つ．その証明は割愛することにする．

定理 7.5 絶対収束する級数はその項の順番をどのように入れ換えても絶対収束し，かつその値は不変である．それに対して，条件収束する級数はその項の順番を適当に入れ換えることによって任意の値に収束させることができる．

例 7.1 足し合わせる順番を変えてしまうとその級数の値が変わってしまうような，有名な条件収束級数の例を 1 つ挙げておこう．$f(x) = \log(1+x)$ の Maclaurin 展開を計算することにより，

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots \tag{7.1}$$

が得られる．これが絶対収束せず，それゆえ条件収束級数であることは問 1.10 の結果から分かる．この右辺の級数に 1 項おきに 0 を足したのち（このようにしても級数の値は変わらない）両辺を 2 で割れば

$$\frac{1}{2}\log 2 = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + 0 + \cdots$$

が得られる．これら 2 式を足し合わせれば

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\log 2 &= 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + 0 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \cdots\end{aligned}$$

となるが，この右辺の級数は (7.1) 式の右辺の級数で正の 2 項を加えたのち負の 1 項を加えるというようにして足し合わせの順番を変えたものに他ならない．ところが，その級数の値は変わってしまっている．

任意の数列は必ずしも収束するとは限らないが，有界な数列は Bolzano–Weierstrass の定理（定理 1.10）より収束する部分列をもつ．また，上に有界でない数列は $+\infty$ に発散する部分列をもち，下に有界でない数列は $-\infty$ に発散する部分列をもつ．このように，$\pm\infty$ を値として許容するのであれば，任意の数列は収束する部分列をもつことが分かる．その部分列の極限値は一般には複数あり，部分列の取り方により変わってくるが，そのような極限値の中で最も大きいものと小さいものは以下で見ていくように利用価値の高い値である．そこで，それらの値を厳密に定義していこう．

定義 7.3　数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$r_n := \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}, \qquad l_n := \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$$

により数列 $\{r_n\}$ および $\{l_n\}$ を定める．このとき，$\{r_n\}$ は単調減少であり $\{l_n\}$ は単調増加であるから，$\pm\infty$ を値として許容すれば，その極限値

$$r = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$$
$$l = \lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$$

が存在する．このとき，r，l をそれぞれ $\{a_n\}$ の**上極限**，**下極限**といい

$$r = \limsup_{n\to\infty} a_n, \qquad l = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

と書く．これらは，$r = \overline{\lim}\, a_n$，$l = \underline{\lim}\, a_n$ とも書かれる．

この定義から分かるように，$\{a_n\}$ が上に有界であればその上極限は実数になるが，上に有界でない場合は任意の自然数 n に対して $r_n = +\infty$ となる．その場合に $\{r_n\}$ を数列と呼ぶのは正しくないが，この場合の $\{a_n\}$ の上極限は $+\infty$ と定めたと理解して欲しい．下極限についても同様である．直感的には，部分列を取ることによって得られる極限値の中で最も大きい値が上極限であり，最も小さい値が下極限である．

$\underline{\lim}\, a_n$　　　　　　　　$\overline{\lim}\, a_n$

問 7.2　以下で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，上極限 $\overline{\lim}\, a_n$ および下極限 $\underline{\lim}\, a_n$ を求めよ．

(1)　$a_n = 1 + n^{(-1)^n}$
(2)　$a_n = \sin \frac{n\pi}{3}$

定理 7.6　$\{a_n\}$ を数列，α を実数とする．

(1)　$\overline{\lim}\, a_n = \alpha$ となるための必要十分条件は次の 2 条件が成り立つことである．
　(i)　任意の正数 ε に対して，ある自然数 n_0 が存在し $a_n < \alpha + \varepsilon$ $(\forall n \geq n_0)$ となる
　(ii)　任意の正数 ε に対して，$\{n \in \mathbf{N} \mid a_n > \alpha - \varepsilon\}$ は無限集合となる
(2)　$\underline{\lim}\, a_n = \alpha$ となるための必要十分条件は次の 2 条件が成り立つことである．
　(i)　任意の正数 ε に対して，ある自然数 n_0 が存在し $a_n > \alpha - \varepsilon$ $(\forall n \geq n_0)$ となる
　(ii)　任意の正数 ε に対して，$\{n \in \mathbf{N} \mid a_n < \alpha + \varepsilon\}$ は無限集合となる

証明 (1) を示そう．まず $\overline{\lim}\, a_n = \alpha$ とする．このとき，定義 7.3 における記号を用いると，数列 $\{r_n\}$ は α に収束する．したがって，任意の正数 ε に対して，ある自然数 n_0 が存在し $n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n に対して $|r_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．それゆえ

$$a_n \leq r_n = \alpha + (r_n - \alpha) < \alpha + \varepsilon \quad (\forall n \geq n_0)$$

となり (i) が従う．また，正数 ε に対して $\{n \in \mathbf{N} \mid a_n > \alpha - \varepsilon\}$ が有限集合であるとすると，ある自然数 n_1 が存在して $a_n \leq \alpha - \varepsilon$ $(\forall n \geq n_1)$ が成り立つ．これより

$$r_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} \leq \alpha - \varepsilon \quad (\forall n \geq n_1)$$

となるが，ここで $n \to \infty$ とすれば $\alpha = \lim r_n \leq \alpha - \varepsilon$ となる．これは ε が正数であることに矛盾する．したがって，(ii) が成り立たなければならない．

次に，(i) および (ii) を仮定して $\overline{\lim}\, a_n = \alpha$ が成り立つことを示そう．任意の正数 ε に対して，(i) より，ある自然数 n_0 が存在し $a_n < \alpha + \varepsilon$ $(\forall n \geq n_0)$ が成り立つ．したがって，$r_n = \sup_{m \geq n} a_m \leq \alpha + \varepsilon$ $(\forall n \geq n_0)$ となるが，ここで $n \to \infty$ とすれば $\overline{\lim}\, a_n \leq \alpha + \varepsilon$ となる．ところが ε は任意の正数であったから，

$$\overline{\lim}\, a_n \leq \alpha \tag{7.2}$$

となる．一方，任意の正数 ε および任意の自然数 n に対して，(ii) より $a_{n_1} > \alpha - \varepsilon$ および $n_1 \geq n$ を満たす自然数 n_1 が存在する．数列 $\{r_n\}$ は単調減少であるから，これより $r_n \geq r_{n_1} \geq a_{n_1} > \alpha - \varepsilon$ となる．ここで $n \to \infty$ とすれば $\overline{\lim}\, a_n \geq \alpha - \varepsilon$ となる．ところが ε は任意の正数であったから，

$$\overline{\lim}\, a_n \geq \alpha \tag{7.3}$$

となる．(7.2) および (7.3) より $\overline{\lim}\, a_n = \alpha$ が得られる．

(2) も全く同様な考察によって示される．(証明終)

定理 7.7 数列 $\{a_n\}$ および実数 α に対して，次の 2 条件 (1), (2) は同値である．

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$

(2) $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = \alpha$

証明 (1)⇒(2): 定理 7.6 より明らかであろう．

(2)⇒(1): $l_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} \leq a_n \leq \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} = r_n$ において $n \to \infty$ とすれば，仮定およびはさみうちの定理より望みの等式が従う．(証明終)

問 7.3 任意の正数列 $\{a_n\}$ に対して次式が成り立つことを示せ．

$$\underline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{7.4}$$

以上の準備の下，正項級数に対する 2 つの収束判定法，すなわち d'Alembert（ダランベール）の判定法と Cauchy の判定法を紹介しよう．

定理 7.8（d'Alembert の収束判定法） $\sum a_n$ を正項級数とする．

(1)　$\overline{\lim}\,\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ならば，$\sum a_n$ は収束する．

(2)　$\underline{\lim}\,\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ならば，$\sum a_n$ は収束しない（$+\infty$ に発散する）．

証明　(1)　まず，$\overline{\lim}\,\frac{a_{n+1}}{a_n} < \theta < 1$ を満たす θ を任意に取り固定する．このとき，定理 7.6 (1) の (i) より，($\varepsilon = \theta - \overline{\lim}\,\frac{a_{n+1}}{a_n}$ に対して）ある自然数 n_0 が存在し $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \theta$ $(\forall n \geq n_0)$，すなわち

$$a_{n+1} < \theta a_n \qquad (\forall n \geq n_0)$$

が成り立つ．この不等式を帰納的に用いれば，$a_n \leq \theta^{n-n_0} a_{n_0}$ $(n \geq n_0)$ となり，さらに $0 < \theta < 1$ より，$\sum \theta^{n-n_0} a_{n_0}$ は収束する．したがって，定理 7.4 より $\sum a_n$ は収束する．

(2)　まず，$\underline{\lim}\,\frac{a_{n+1}}{a_n} > \eta > 1$ を満たす η を任意に取り固定する．このとき，定理 7.6 (2) の (i) より，($\varepsilon = \underline{\lim}\,\frac{a_{n+1}}{a_n} - \eta$ に対して）ある自然数 n_0 が存在し $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \eta$ $(\forall n \geq n_0)$，すなわち

$$a_{n+1} > \eta a_n \qquad (\forall n \geq n_0)$$

が成り立つ．この不等式を帰納的に用いれば，$a_n \geq \eta^{n-n_0} a_{n_0}$ $(n \geq n_0)$ となり，$\eta > 1$ より数列 $\{a_n\}$ は $+\infty$ に発散する．したがって，定理 7.2 より $\sum a_n$ は収束しない．(証明終)

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ の場合は一般に判定できない，すなわち，収束する場合と収束しない場合があるので注意しよう．例えば，$a_n = \frac{1}{n^2}$ および $a_n = \frac{1}{n}$ により定まる 2 つの数列は共に $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ を満たす．ところが，対応する級数については $\sum \frac{1}{n^2}$ は収束するが $\sum \frac{1}{n}$ は $+\infty$ に発散する（問 1.10 を参照せよ）．

この定理は大ざっぱに言うと，等比級数の収束・発散のように，隣り合う項の比が 1 より小さくなっている場合には収束し，その比が 1 より大きい場合には発散することを述べている．

定理 7.9（Cauchy の収束判定法）　$\sum a_n$ を正項級数とする．

(1)　$\overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n} < 1$ ならば，$\sum a_n$ は収束する．

(2)　$\overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n} > 1$ ならば，$\sum a_n$ は収束しない（$+\infty$ に発散する）．

証明　(1)　まず，$\overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n} < \theta < 1$ を満たす θ を任意に取り固定する．このとき，定理 7.6 (1) の (i) より，($\varepsilon = \theta - \overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n}$ に対して）ある自然数 n_0 が存在し $\sqrt[n]{a_n} < \theta$ $(\forall n \geq n_0)$，すなわち

$$a_n < \theta^n \qquad (\forall n \geq n_0)$$

が成り立つ．ここで，$0 < \theta < 1$ より $\sum \theta^n$ は収束するので，定理 7.4 より $\sum a_n$ は収束する．

(2)　まず，$\overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n} > \eta > 1$ を満たす η を任意に取り固定する．このとき，定理 7.6 (1) の (ii) より，($\varepsilon = \overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n} - \eta$ に対して）$\{n \in \mathbf{N} \mid \sqrt[n]{a_n} > \eta\}$ は無限集合になる．したがって，$\{a_n\}$ の適当な部分列 $\{a_{\varphi(n)}\}$ を選べば

$$\sqrt[\varphi(n)]{a_{\varphi(n)}} > \eta \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

が成り立つ．したがって，$a_{\varphi(n)} > \eta^{\varphi(n)} \to +\infty$ $(n \to \infty)$ となり，特に $\{a_n\}$ は収束しない．したがって，定理 7.2 より $\sum a_n$ は収束しない．(証明終)

この判定法でも $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{a_n} = 1$ の場合は一般に判定できない，すなわち，収束する場合と収束しない場合があるので注意しよう．上で紹介した 2 つの収束判定法は，その証明からも分かるように，どちらも等比級数と比較することによってその収束性を判定している．

(7.4) 式より，d'Alembert の判定法（定理 7.8）でその収束・発散を判定できるような正項級数 $\sum a_n$ に対しては，Cauchy の判定法（定理 7.9）でもその収束・発散を判定できることが分かる．しかし，その逆は一般には成立しない．例えば，$0 < \alpha < \beta < 1$ に対して

$$a_n := \begin{cases} \alpha^{2m-1} & (n = 2m-1) \\ \beta^{2m} & (n = 2m) \end{cases}$$

により定まる正項級数 $\sum a_n$ を考えよう．$n = 2m-1$ のとき $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2m} \to +\infty\ (m \to \infty)$，$n = 2m$ のとき $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2m} \to 0\ (m \to \infty)$ であるから

$$\varliminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \quad \text{および} \quad \varlimsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$$

となる．したがって，d'Alembert の判定法でこの正項級数 $\sum a_n$ の収束・発散を判定することはできない．一方，$n = 2m-1$ のとき $\sqrt[n]{a_n} = \alpha$，$n = 2m$ のとき $\sqrt[n]{a_n} = \beta$ であるから

$$\varlimsup \sqrt[n]{a_n} = \beta < 1$$

となり，Cauchy の判定法より正項級数 $\sum a_n$ は収束することが分かる．このことから，Cauchy の判定法の方が d'Alembert の判定法より優れていると見なすこともできる．しかし，実際の応用ではまず隣り合う項の比 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ の極限を計算してみて，それで判定できない場合に $\sqrt[n]{a_n}$ の極限を計算する方が計算の手間がかからない場合が多い．

問 7.4　以下の級数が収束するかどうかを判定せよ．

(1)　$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(2)　$\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(3)　$\sum (\sqrt{1+n^2} - n)$

7.2　べき級数と収束半径

定義 7.4　複素数 a, z および複素数列 $\{a_n\}$ から作られる級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots \tag{7.5}$$

を，a を中心とする**べき級数**あるいは**整級数**という．

定理 7.10　a を中心とするべき級数 (7.5) に対して，次の (1), (2) が成り立つ．

(1)　ある $z = z_0 \in \mathbf{C} \setminus \{a\}$ において (7.5) が収束すれば，$|z-a| < |z_0 - a|$ を満たす任意の複素数 z に対して (7.5) は絶対収束する．

(2)　ある $z = z_1 \in \mathbf{C}$ において (7.5) が収束しないならば，$|z-a| > |z_1 - a|$ を満たす任意の複素数 z に対して (7.5) は収束しない．

証明　(1)　仮定より $\sum a_n(z_0-a)^n$ は収束するから，定理 7.2 より数列 $\{a_n(z_0-a)^n\}$ は 0 に収束する．したがって，ある自然数 n_0 が存在して $|a_n(z_0-a)^n|<1$ $(\forall n \geq n_0)$ が成り立つ．それゆえ，$|z-a|<|z_0-a|$ および $n>m\geq n_0$ であれば

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{n}|a_k(z-a)^k| &= \sum_{k=m+1}^{n}|a_k(z_0-a)^k|\frac{|z-a|^k}{|z_0-a|^k} \leq \sum_{k=m+1}^{n}\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^k \\ &\leq \frac{\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^{m+1}}{1-\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|} \to 0 \qquad (m\to\infty)\end{aligned}$$

となる．したがって，定理 7.1 より $|z-a|<|z_0-a|$ を満たす任意の複素数 z に対して (7.5) は絶対収束する．

(2)　もし $|z-a|>|z_1-a|$ を満たすある複素数 z に対して (7.5) が収束したとすると，(1) の結果より (7.5) は $z=z_1$ において絶対収束しなければならないが，これは仮定に矛盾する．したがって，$|z-a|>|z_1-a|$ を満たす任意の複素数 z に対して (7.5) は収束しない．（証明終）

定理 7.11　a を中心とするべき級数 (7.5) に対して，以下の性質 (1), (2) を満たす $R\in[0,\infty]$ がただ 1 つ存在する（$R=\infty$ の場合もある）．

(1)　$|z-a|<R$ を満たす任意の複素数 z に対して (7.5) は収束する．
(2)　$|z-a|>R$ を満たす任意の複素数 z に対して (7.5) は収束しない．

証明　べき級数 (7.5) が収束するような複素数 z 全体の集合を S とし，$A:=\{|z-a|\,|\,z\in S\}$ とおく．明らかに $a\in S$ であるから，$0\in A$ である．すなわち，集合 A は空でない $[0,\infty)$ の部分集合である．したがって，実数の連続性公理より，上限 $R:=\sup A\in[0,\infty]$ が存在する．このとき，$|z-a|<R=\sup A$ ならば定理 1.1 (1) の (ii) より，$|z-a|<|z_0-a|$ を満たす $z_0\in S$ が存在する．このとき，$z=z_0$ において (7.5) が収束するので，定理 7.10 (1) よりこのような z に対して (7.5) は絶対収束する．次に，$|z-a|>R=\sup A$ とすると $z\notin S$ であるから，このような z に対しては (7.5) は収束しない．すなわち，$R=\sup A$ は (1) および (2) の性質をもつ（R の存在）．最後に，このような R がただ 1 つしか存在しないこと（R の一意性）は明らかであろう．（証明終）

定義 7.5　定理 7.11 における R をべき級数 (7.5) の**収束半径**という．

この収束半径は次の Cauchy–Hadamard（コーシー・アダマール）の公式によって求められる．

定理 7.12（Cauchy–Hadamard の公式）　a を中心とするべき級数 (7.5) の収束半径 R は

$$R=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

で与えられる．ただし，$1/0=\infty$ および $1/\infty=0$ とする．

証明　$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n(z-a)^n|}=|z-a|\,\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ に注意すると，Cauchy の収束判定法（定理 7.9）より，

$$\begin{aligned}|z-a|<1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \quad &\Rightarrow \quad \text{(7.5) は絶対収束する} \\ |z-a|>1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \quad &\Rightarrow \quad \text{(7.5) は絶対収束しない}\end{aligned}$$

ことが分かる．このことと定理 7.10 より，$|z-a| > 1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ ならば (7.5) は収束しないことが従う．実際，もし (7.5) が収束するならば，定理 7.10 (1) より $|z-a| > |z_1 - a| > 1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ を満たす任意の z_1 に対して (7.5) は絶対収束することになるが，これは上で示したことに矛盾する．以上のことと収束半径の定義より $R = 1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ となる．(証明終)

この Cauchy–Hadamard の公式と (7.4) および定理 7.7 に注意すると，もし極限 $r = \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ が存在すれば，べき級数 (7.5) の収束半径は $1/r$ で与えられることが分かる．収束半径を計算する際は，まずこの極限を計算してみるのがよい．

例 7.2　(1)　指数関数 e^x の Maclaurin 展開は $e^x = \sum \frac{1}{n!}x^n$ $(x \in \mathbf{R})$ で与えられた（例 3.9 を参照せよ）．対応する（複素数を変数とする）べき級数の収束半径を計算しよう．$a_n = \frac{1}{n!}$ とおくと，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる．したがって，べき級数 $\sum \frac{1}{n!}z^n$ $(= e^z)$ の収束半径は ∞ であり，すべての複素数 z に対して収束する．なお，複素数 z を変数とする指数関数 e^z はこのべき級数によって定義される．このとき，

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m} + i\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\theta^{2m+1} \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

となり，**Euler（オイラー）の公式**が導かれる．

(2)　対数関数 $\log(1+x)$ の Maclaurin 展開は $\log(1+x) = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ $(|x| < 1)$ で与えられた（問 3.12 を参照せよ）．$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ とおくと，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

となるので，べき級数 $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n$ $\big(= \log(1+z)\big)$ の収束半径は 1 であり，$|z| < 1$ を満たすすべての複素数 z に対して収束する．

問 7.5　以下のべき級数の収束半径を求めよ．ただし，a は正定数である．

(1)　$\sum \frac{na^n}{n+2}z^n$

(2)　$\sum a^{n^2}z^n$

(3)　$\sum z^{n^2}$

7.3　関数列・関数項級数の収束

この節では，区間 I で定義された関数列 $\{f_n\}$ およびその関数列から作られる関数項級数 $\sum f_n$ の収束に関して解説していく．各関数 f_n は n に無関係な共通の定義域 I をもつと仮定していることに注意しよう．

定義 7.6（関数列の収束）　f, f_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を区間 I で定義された関数とする．

(1) 関数列 $\{f_n\}$ が f に**各点収束**するとは，任意の $x \in I$ を固定するごとに数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に収束するとき，すなわち，任意の $x \in I$ および任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 n_0 が存在し，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n に対して $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つときをいう．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{（各点）} \qquad \text{あるいは} \qquad f_n \to f \text{（各点）}$$

と書く．

(2) 関数列 $\{f_n\}$ が f に**一様収束**するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 n_0 が存在し，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n および任意の $x \in I$ に対して $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つときをいう．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{（一様）} \qquad \text{あるいは} \qquad f_n \to f \text{（一様）}$$

と書く．

関数列 $\{f_n\}$ が f に各点収束することの定義を論理記号を用いて書くと次のようになる．

$$\forall x \in I \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; \forall n \in \mathbf{N} \; \bigl(n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\bigr)$$

また，関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束することの定義を論理記号を用いて書くと次のようになる．

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; \forall n \in \mathbf{N} \; \forall x \in I \; \bigl(n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\bigr)$$

これらの違いは「$\forall x \in I$」の位置にあることに注意しよう．各点収束の場合，n_0 は一般には ε だけでなく x にも依存しており，x を変えるとそれに応じて n_0 を大きく取らなければならない．それに対して一様収束の場合には，n_0 は ε だけから決まり，x に関して無関係に（すなわち一様に）取ることができる．数列 $f_n(x)$ が位置 x に関して一様な（無関係な）速さで $f(x)$ に収束することから一様収束と呼ばれるのである．このことから，一様収束すれば各点収束することが分かるが，その逆は一般には成り立たないことに注意しよう．数列に対しては収束という概念はただ 1 つであったが，関数列に対しては少なくとも 2 つの（実は非常に沢山の）収束の概念がある．

一様収束することの必要十分条件を次の形で書いておくと各点収束との違いが明確になるであろう．その証明は問として残しておく．

定理 7.13　区間 I で定義された関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束するための必要十分条件は次式が成り立つことである．

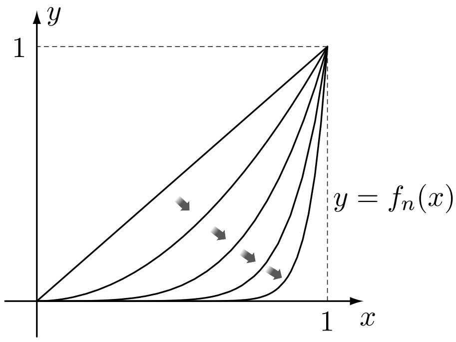
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

問 7.6　定理 7.13 を証明せよ．

一様収束性をよりよく理解するためには，各点収束するが一様収束しないような関数列の例を見るのがいいであろう．

例 7.3　$f_n(x) = x^n$ により，閉区間 $I = [0, 1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}$ を定めると

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$



となる．したがって，関数列 $\{f_n\}$ は上式で定義される関数 f に各点収束する．ところが，

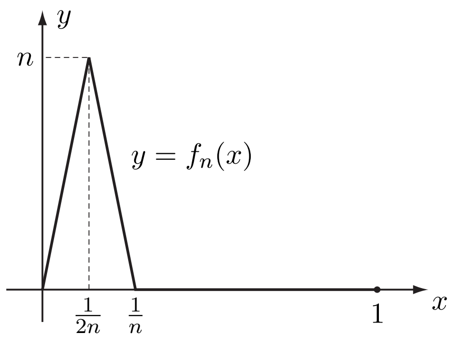
$$\sup_{0\leq x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| = 1 \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

であるから $\{f_n\}$ は f に一様収束はしない．この例では，x が $x < 1$ を満たしながら 1 に近づけば近づくほど，数列 $\{f_n(x)\}$ の 0 に収束する速度が遅くなっており，そこで一様収束性が崩れているのである．

この例では連続な関数列 $\{f_n\}$ の極限関数 f が $x = 1$ において不連続になっており，そのことが原因で一様収束性が崩れていると見なすこともできる．そうすると，連続な関数列 $\{f_n\}$ の極限関数 f もまた連続になっていれば一様収束しているに違いないと期待する人がいるかもしれないが，次の例から分かるようにそれは誤りである．

例 7.4　次のように区間 $I = [0, 1]$ で定義された連続関数列 $\{f_n\}$ を定める．

$$f_n(x) := \begin{cases} 2n^2 x & \left(0 \leq x < \frac{1}{2n}\right) \\ 2n(1 - nx) & \left(\frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{n} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$



このとき，関数列 $\{f_n\}$ は 0 に各点収束するが，

$$\max_{0\leq x\leq 1} |f_n(x)| = n \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

であるから一様収束はしない．

問 7.7　以下で定義される関数列 $\{f_n\}$ が区間 I で各点収束することを示し，その極限関数 f を求めよ．さらに，その関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束するかどうかを判定せよ．

(1)　$f_n(x) = xe^{-nx}$,　$I = [0, \infty)$
(2)　$f_n(x) = n^2 xe^{-nx}$,　$I = [0, \infty)$
(3)　$f_n(x) = nx(1 - x)^n$,　$I = [0, 1]$

定理 7.14　区間 I で定義された連続な関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束すれば，その極限関数 f もまた I で連続である．

証明　$x_0 \in I$ を任意に取り固定しよう．任意の正数 ε に対して，$\{f_n\}$ が f に一様収束することから，ある自然数 n_0 が存在して，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n および任意の $x \in I$ に対して $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ が成り立つ．特に，

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (x \in I)$$

となる．また，f_{n_0} は区間 I で連続であることから，先の正数 ε に対してある正数 δ が存在し，$|x - x_0| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ．したがって，$|x - x_0| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \big|\big(f(x) - f_{n_0}(x)\big) + \big(f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\big) + \big(f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\big)\big| \\ &\leq \big|f(x) - f_{n_0}(x)\big| + \big|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\big| + \big|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\big| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

となるが，これは関数 f が x_0 で連続であることを示している．ところが $x_0 \in I$ は任意であったから，f は I で連続である．(証明終)

この関数列の一様収束性は，以下の定理で見ていくように，極限と積分の順序交換，あるいは極限と微分の順序交換を保証するための十分条件にも用いられる．

定理 7.15　閉区間 $[a, b]$ で定義された連続な関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束すれば次式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad \left(= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \right) \tag{7.6}$$

証明　仮定および定理 7.13 より

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \\ &\leq (b-a) \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| \\ &\to 0 \qquad (n \to \infty) \end{aligned}$$

となることに注意すればよい．(証明終)

例 7.5　極限と積分の順序交換 (7.6) が成り立たないような例を挙げることにより，定理 7.15 における仮定（すなわち，$\{f_n\}$ が f に一様収束すること）の重要性を理解してもらおう．$\{f_n\}$ を例 7.4 における関数列とする．$\{f_n\}$ は 0 に各点収束していたが一様収束はしていなかった．また明らかに，$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ が成り立つ．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

となり，例 7.4 における関数列 $\{f_n\}$ に対しては極限と積分の順序は交換できない．

問 7.8 $\{f_n\}$ を $f_n(x)=\frac{n}{n+x}$ により定まる閉区間 $I=[0,1]$ で定義された関数列とする．

(1) $\{f_n\}$ はある関数 f に一様収束することを示し，その極限関数 f を求めよ．
(2) $\lim\int_0^1 f_n(x)dx$ および $\int_0^1 \lim f_n(x)dx$ を計算し，それらが一致することを確かめよ．

定理 7.16 閉区間 $[a,b]$ で定義された C^1 級の関数列 $\{f_n\}$ が f に各点収束し，かつその導関数からなる関数列 $\{f_n'\}$ が g に一様収束すれば，極限関数 f もまた C^1 級であり $f'=g$，すなわち

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n' \tag{7.7}$$

が成り立つ．

証明 各関数 f_n は $[a,b]$ で C^1 級であるから，微分積分学の基本定理（定理 5.12 (2)）より，任意の $x\in[a,b]$ に対して

$$f_n(x)-f_n(a)=\int_a^x f_n'(y)dy$$

となる．仮定より $\{f_n\}$ は f に各点収束，$\{f_n'\}$ は g に一様収束しているので，上式において $n\to\infty$ とすれば，定理 7.15 より

$$f(x)-f(a)=\int_a^x g(y)dy \qquad (x\in[a,b])$$

となる．定理 7.14 より極限関数 g は $[a,b]$ で連続であるから，再び微分積分学の基本定理（定理 5.12 (1)）より，この右辺の関数は $[a,b]$ で C^1 級である．それゆえ左辺の関数 f もまた $[a,b]$ で C^1 級であり，$f'=g$ が成り立つ．(証明終)

例 7.6 ここでも，極限と微分の順序交換 (7.7) が成り立たない例を挙げることにより定理 7.16 の仮定の重要性を理解してもらおう．$f_n(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ により定まる閉区間 $[0,1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}$ を考えよう．

$$\max_{0\le x\le 1}|f_n(x)|=\frac{1}{n+1}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

より，$\{f_n\}$ は 0 に一様収束する．一方，$f_n'(x)=x^n$ より，$f_n'(1)=1$ $(\forall n\in\mathbf{N})$ である．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(1)=1\neq 0=\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'(1)$$

となり，極限の微分の順序は交換できない．今の場合，$\{f_n'\}$ は各点収束しているが一様収束していないことに注意しよう．

定義 7.7（関数項級数の収束） f_n $(n=1,2,3,\ldots)$ を区間 I で定義された関数とする．このとき，関数列 $\{f_n\}$ から作られる形式

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1+f_2+f_3+\cdots$$

を**関数項級数**といい，$s_n:=f_1+f_2+\cdots+f_n$ を（すなわち，$s_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x), x\in I$ により定まる関数 s_n を）その第 n 部分和という．数列から作られる級数のときと同様，その関数項級数はしばしば $\sum f_n$ と略記される．第 n 部分和からなる関数列 $\{s_n\}$ が関数 F に各点収束（または一様収束）するとき，関数項級数 $\sum f_n$ は F に**各点収束**（または**一様収束**）するという．

積分の線形性（定理 5.7）および微分の線形性（定理 3.2）に注意し，第 n 部分和からなる関数列 $\{s_n\}$ に対して定理 7.15 および定理 7.16 を適用すれば次の定理が得られる．

定理 7.17　閉区間 $[a, b]$ で定義された連続な関数列 $\{f_n\}$ に対して，関数項級数 $\sum f_n$ が一様収束すれば次式が成り立つ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx \qquad \text{（項別積分）}$$

定理 7.18　閉区間 $[a, b]$ で定義された C^1 級の関数列 $\{f_n\}$ に対して，関数項級数 $\sum f_n$ が各点収束し，かつその導関数からなる関数項級数 $\sum f_n'$ が一様収束すれば，極限関数 $\sum f_n$ もまた C^1 級であり次式が成り立つ．

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n' \qquad \text{（項別微分）}$$

問 7.9　定理 7.17 および定理 7.18 を証明せよ．

関数項級数の一様収束に関して，定理 7.1 と同様にして次の定理が証明される．

定理 7.19　区間 I で定義された関数項級数 $\sum f_n$ が一様収束するための必要十分条件は，任意の正数 ε に対してある自然数 n_0 が存在し，$n > m \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n, m および任意の $x \in I$ に対して

$$|f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \cdots + f_n(x)| < \varepsilon$$

が成り立つことである．

与えられた関数項級数が一様収束するかどうかの判定法として，次の定理がとても便利である．

定理 7.20（Weierstrass の M 判定法）　区間 I で定義された関数列 $\{f_n\}$ に対して次の 2 条件を満たす数列 $\{M_n\}$ が存在するとする．

(1)　$|f_n(x)| \leq M_n$ $(\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbf{N})$
(2)　$\sum M_n$ は収束する

このとき，関数項級数 $\sum f_n$ は一様収束かつ絶対収束する．

証明　任意の正数 ε に対して，仮定 (2) および定理 7.1 より，ある自然数 n_0 が存在し，$n > m \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n, m に対して

$$M_{m+1} + M_{m+2} + \cdots + M_n < \varepsilon$$

が成り立つ．したがって，$n > m \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n, m および任意の $x \in I$ に対して，仮定 (1) より

$$\begin{aligned} |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \cdots + f_n(x)| &\leq |f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \cdots + |f_n(x)| \\ &\leq M_{m+1} + M_{m+2} + \cdots + M_n \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となる．それゆえ，定理 7.19 より関数項級数 $\sum f_n$ は一様収束かつ絶対収束する．（証明終）

問 7.10　以下の関数項級数が区間 I において一様収束するかどうかを判定せよ．

(1) $\sum \frac{nx^2}{n^3+x^3}$,　$I = [0,1]$

(2) $\sum nx^6 e^{-nx^2}$,　$I = \mathbf{R}$

(3) $\sum \frac{1}{1+n^2x^2}$,　$I = (0,1]$

この Weierstrass の M 判定法（定理 7.20）の 1 つの応用例として，次の定理を証明することができる．その証明はさほど難しくはないが割愛する．

定理 7.21　a を中心とするべき級数 $\sum a_n(z-a)^n$ の収束半径を R とする．このとき，開区間 $(a-R, a+R)$ で定義された関数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

は C^∞ 級であり，かつ何回でも項別微分および項別積分が可能である．

例 7.7　等比数列の和の公式より

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (|x| < 1) \tag{7.8}$$

が成り立つ．この右辺の級数の収束半径は 1 であることおよび定理 7.21 に注意すると，以下の形式的な計算が正しいことが保証される．(7.8) の両辺を微分すると，

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad (|x| < 1)$$

となる．さらに微分を続けると，任意の自然数 k に対して

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n \qquad (|x| < 1)$$

が成り立つことが分かる．また，(7.8) の x を $-y$ に置き換え，その両辺を y に関して 0 から x まで積分すると

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \int_0^x \frac{dy}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-y)^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \qquad (|x| < 1) \end{aligned}$$

となる．さらに，(7.8) の x を $-y^2$ に置き換え，その両辺を y に関して 0 から x まで積分すると

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dy}{1+y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-y^2)^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad (|x| < 1)$$

が得られる．

付 録 A

A.1 実数の公理

第 1.1 節において述べた実数の公理のうちの 2 つの公理（代数の公理と順序の公理）を紹介しよう．そのために，まず体の定義を述べる．

定義 A.1 K を空でない集合とし，任意の $a, b \in K$ に対して，和 $a+b \in K$ および積 $ab \in K$ が定義されているとする．それら 2 つの演算に関して以下の条件 (1)–(10) が満たされているとき，K は**体**であるという．

(1) $a + b = b + a$ （和に関する交換法則）
(2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ （和に関する結合法則）
(3) ある元 $0 \in K$ が存在して，任意の $a \in K$ に対して $a + 0 = a$ （零元 0 の存在）
(4) 任意の $a \in K$ に対して，ある元 $-a \in K$ が存在して $a + (-a) = 0$ （和に関する逆元の存在）
(5) $ab = ba$ （積に関する交換法則）
(6) $(ab)c = a(bc)$ （積に関する結合法則）
(7) $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$ （分配法則）
(8) ある元 $1 \in K$ が存在して，任意の $a \in K$ に対して $a1 = a$ （単位元 1 の存在）
(9) 任意の $a \in K \setminus \{0\}$ に対して，ある元 a^{-1} が存在して $aa^{-1} = 1$ （積に関する逆元の存在）
(10) $1 \neq 0$ （非自明性）

第 1.1 節において述べた代数の公理とは,「$\mathbf{R}$ は体である」ということである．
次に，順序の公理を述べるために全順序集合という言葉を定義する．

定義 A.2 X を空でない集合とし，任意の $a, b \in X$ に対して順序と呼ばれる関係 $a \leq b$ が定義されているとする．その関係が以下の条件 (1)–(4) を満たすとき，X は**全順序集合**であるという．

(1) 任意の $a \in X$ に対して，$a \leq a$ （反射律）
(2) $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$ （推移律）
(3) $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$ （反対称律）
(4) $a \leq b$ あるいは $b \leq a$ のどちらか一方が常に成り立つ （全順序性）

$a \leq b$ を $b \geq a$ とも書く．また,「$a \leq b$ かつ $a \neq b$」という関係を $a < b$ あるいは $b > a$ と書く．

順序の公理 $\mathbf{R}$ は体かつ全順序集合であり，さらに以下の条件 (1), (2) を満たす．

(1) $a \leq b$ ならば $a + c \leq b + c$
(2) $0 \leq a$ かつ $0 \leq b$ ならば $0 \leq ab$

第 1.1 節においては上限を用いた連続性公理を採用したが，それ以外にも（その連続性公理と同値な）幾つかの連続性公理が知られている．ここでそれらを紹介しよう．

定義 A.3 A および B を空でない $\mathbf{R}$ の部分集合とする．次の 3 条件

$$(1)\ A \cup B = \mathbf{R}; \qquad (2)\ A \cap B = \emptyset; \qquad (3)\ a \in A \text{ かつ } b \in B \text{ ならば } a < b$$

が満たされているとき，(A, B) を $\mathbf{R}$ の**切断**という．

直感的には，数直線をどこかでぶった切り，その左側および右側の半直線に対応する実数の集合を，それぞれ A および B としたとき，(A, B) を $\mathbf{R}$ の切断と言っているのである．重要なのは，その切り口がどうなるかということである．

さて，本文において述べてきた連続性公理や幾つかの定理を，命題という形で列挙しよう．

命題 A.1 空でない $\mathbf{R}$ の部分集合 A が上（または下）に有界ならば，A の上限（または下限）が存在する．

命題 A.2（Dedekind（デデキント）の切断） (A, B) を $\mathbf{R}$ の切断とすると，次の 2 条件のうちどちらか一方が必ず成り立つ．

(1) A は最大元をもち，かつ B は最小元をもたない．
(2) A は最大元をもたず，かつ B は最小元をもつ．

この命題は，直感的には，数直線をぶった切ったときの切り口が左側の半直線あるいは右側の半直線のどちらか一方のみに必ず属す，ということを述べている．

命題 A.3 上（または下）に有界な単調増加（または減少）数列は収束列である．

命題 A.4（Bolzano–Weierstrass） 有界な数列は収束する部分列をもつ．

命題 A.5（Cauchy） Cauchy 列は収束列である．

命題 A.6（区間縮小法） $I_n = [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbf{N})$ を次の 2 条件

$$(1)\ I_{n+1} \subseteq I_n \ (\forall n \in \mathbf{N}); \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

を満たす閉区間の列とする．このとき，ある実数 α が存在して，すべての閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbf{N})$ の共通部分は 1 点のみの集合 $\{\alpha\}$ になる：$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} I_n = \{\alpha\}$.

命題 A.7（Archimedes の公理） 任意の正数 a, b に対して，$a < nb$ となる自然数 n が存在する．

以上の命題の同値性に関して，以下の定理が成り立つ．

定理 A.1 命題 A.1 $\Leftrightarrow$ 命題 A.2 $\Leftrightarrow$ 命題 A.3 $\Leftrightarrow$ 命題 A.4 $\Leftrightarrow$ 命題 A.5 と A.7 $\Leftrightarrow$ 命題 A.6 と A.7

この定理の証明は割愛する．この定理により，上のどの命題を連続性公理として採用しても全く同じ理論が展開されることが分かる．(ただし，命題 A.5 と A.7，および命題 A.6 と A.7 は同時に２つ採用する.）その際，残りの命題は定理 A.1 において証明された定理となる．

連続性公理は，直感的には実数は数直線上に隙間なく（連続的に）分布していることを表しており，有理数全体の集合 $\mathbf{Q}$ はその性質をもっていない．すなわち，有理数だけを使って数直線を描くと隙間だらけになってしまうのである．しかしながら，隙間はあるのだけど，有理数は数直線上にぎっしりと分布していることが次の定理から分かる．

定理 A.2 $a<b$ を満たす任意の実数 a,b に対して，$a<q<b$ を満たす有理数 q が存在する．

証明 $b-a>0$ であるから，Archimedes の公理より $1<(b-a)m$ を満たす自然数 m が存在する．再び Archimedes の公理より $|am|<n_0$，すなわち $-n_0<am<n_0$ を満たす自然数 n_0 が存在する．このとき，集合 $A:=\{n\in\mathbf{Z}\,|\,am<n\leq n_0\}$ は高々$2n_0$ 個の元から成る空でない有限集合だから最小元 $n=\min A$ が存在する．このとき，$n\in\mathbf{Z}$ かつ $n-1\leq am<n$ が成り立つ．したがって，$am<n\leq am+1<bm$ となるので，$q=\frac{n}{m}$ とおけばよい．(証明終)

任意の実数 α および任意の正数 ε に対して，$a=\alpha-\varepsilon, b=\alpha+\varepsilon$ として定理 A.2 を適用すれば，$\alpha-\varepsilon<q<\alpha+\varepsilon$ すなわち $|\alpha-q|<\varepsilon$ を満たす有理数 q が存在することが分かる．これは，任意の実数が任意の精度で有理数によって近似されることを示している．この性質を有理数全体の集合 $\mathbf{Q}$ が実数全体の集合 $\mathbf{R}$ において**稠密**であるという．

A.2 ヒントと略解

第１章 実数と数列の極限

問題 1.1 (1) $\sup A=\sqrt{2}, \inf A=0$，$\max A$ および $\min A$ は存在しない．
(2) $\sup A=\frac{1}{2}, \inf A=\min A=-2$，$\max A$ は存在しない．
(3) $\sup A=\max A=-\sqrt{3}, \inf A=-\infty$，$\min A$ は存在しない．

問題 1.7 (1) $1\leq a_n<2$ $(\forall n\in\mathbf{N})$ となることに注意し，数学的帰納法を用いよ．
(2) 極限値を α とすると $\alpha^2=\alpha+2$ であるから $\alpha=2$ となる．

問題 1.8 (1) $a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{(a_n+1)(a_{n-1}+1)}(a_n-a_{n-1})$ に注意せよ．
(2) 極限値を α とすると $\alpha=\frac{1}{\alpha+1}$ であるから $\alpha=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ となる．

問題 1.9 $a_n=(-1)^n n$，$a_n=n\sin\frac{n\pi}{2}$ など．

第２章 連続関数

問題 2.1 $f(x)\to\alpha_+$ $(x\to a+0)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in I$ $(a<x<a+\delta\Rightarrow|f(x)-\alpha_+|<\varepsilon)$
$f(x)\to\alpha_-$ $(x\to a-0)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in I$ $(a-\delta<x<a\Rightarrow|f(x)-\alpha_-|<\varepsilon)$

問題 2.2 $f(x)\to\alpha$ $(x\to+\infty)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists M>0\,\forall x\in I$ $(x>M\Rightarrow|f(x)-\alpha|<\varepsilon)$
$f(x)\to\alpha$ $(x\to-\infty)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists M>0\,\forall x\in I$ $(x<-M\Rightarrow|f(x)-\alpha|<\varepsilon)$

問題 2.6 $\varepsilon=\frac{f(a)}{2}>0$ に対して連続性の定義を用いよ．

問題 2.7 $f(x) \to +\infty$ $(x \to \pm\infty)$ より，十分大きな正数 R を取ると $f(x) > f(0) = a_0$ $(|x| \geq R)$ となる．このとき，閉区間 $[-R, R]$ における f の最小値が $\mathbf{R}$ における f の最小値となる．

問題 2.8 $f(x) \to \pm\infty$ $(x \to \pm\infty)$ より，十分大きな正数 R を取ると $f(-R) < 0 < f(R)$ となる．そこで，閉区間 $[-R, R]$ において中間値の定理を適用せよ．

問題 2.9

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin^{-1}x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos^{-1}x$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\tan^{-1}x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

第３章　微分法

問題 3.3 (1) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$　(2) $f'(x) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \log x + \frac{\sin x}{x}\right)$　(3) $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

問題 3.4 (1) $f'(x) = 2|x|$　(2) $f'(x) = \arctan\frac{1}{|x|} - \frac{|x|}{x^2+1}$ $(x \neq 0)$ および $f'(0) = \frac{\pi}{2}$

問題 3.6 (1) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}$　(3) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\frac{1}{\sin x}\right)^x = 1$

問題 3.7 $F''(x) = f''(\phi(x))\bigl(\phi'(x)\bigr)^2 + f'(\phi(x))\phi''(x)$
$F'''(x) = f'''(\phi(x))\bigl(\phi'(x)\bigr)^3 + 3f''(\phi(x))\phi''(x)\phi'(x) + f'(\phi(x))\phi'''(x)$

問題 3.9 (1) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$　(2) $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} - \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}$
(3) $f^{(n)}(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(n\alpha + x\sin\alpha)$

問題 3.10 $f^{(2m)}(0) = 0$ および $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m(2m)!$

問題 3.12 (1) $f(x) = \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}a^{m-n}x^n$　(2) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ $(|x| < 1)$
(3) $f(x) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + 1\right)x^n$ $(|x| < 1)$

第４章　偏微分法

問題 4.2 (1) 連続である　(2) 連続でない（$f(x, x^2) = \frac{1}{2}$ に注意せよ）

問題 4.3 (1) $f_x(x, y) = x^{y-1}y,\ f_y(x, y) = x^y\log x$　(2) $f_x(x) = \frac{y}{x^2+y^2},\ f_y(x, y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$
(3) $f_x(x, y) = \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2},\ f_y(x, y) = -\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$ $\bigl((x, y) \neq (0, 0)\bigr)$ および $f_x(0, 0) = 1,\ f_y(0, 0) = 0$

問題 4.5 $F''(t) = f_{xx}(\phi(t), \psi(t))\bigl(\phi'(t)\bigr)^2 + 2f_{xy}(\phi(t), \psi(t))\phi'(t)\psi'(t) + f_{yy}(\phi(t), \psi(t))\bigl(\psi'(t)\bigr)^2 + f_x(\phi(t), \psi(t))\phi''(t) + f_y(\phi(t), \psi(t))\psi''(t)$

問題 4.7 (1) 停留点は $(0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0)$．$(0, 0)$ は鞍点，$(0, \pm 1)$ は極小点，$(\pm 1, 0)$ は極大点
(2) 停留点は $(0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$．$(0, 0)$ は鞍点，$(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ は極小点

第５章　積分法

問題 5.3 (1) 一様連続でない（$x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ で定まる I 内の数列 $\{x_n\}$ を考えよ）

(2) 一様連続である（$f(0)=0$ と定めると f は閉区間 $[0,1]$ で連続になる）
(3) 一様連続でない（$x_n=n, y_n=n+\frac{1}{n}$ で定まる I 内の数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ を考えよ）

問題 5.4 f が I で単調増加の場合には，任意の I の分割 Δ に対して $0\le \overline{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)\le (f(b)-f(a))|\Delta|$ が成り立つことを示してから，定理 5.2 を用いよ．

問題 5.9 (1) $x^m(1-x)^n=\bigl(\frac{1}{m+1}x^{m+1}\bigr)'(1-x)^n$ と見て部分積分を用いよ． (2) $I_{m,n}=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$

問題 5.10 (1) $\sin^n x=\sin^{n-1}x(-\cos x)'$ と見て部分積分を用いよ．
(2) $J_n=\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}$（$n$ が偶数），$J_n=\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\cdots\frac{n-1}{n}$（$n$ が奇数）
(3) $J_{2n}=\frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$，$J_{2n+1}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ と書けることに注意せよ．

問題 5.11 (1) $\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\bigl(\arctan x+\frac{x}{x^2+1}\bigr)+C$ (2) $\frac{1}{4}\log\bigl|\frac{x-1}{x+1}\bigr|-\frac{1}{2}\arctan x+C$
(3) $\log(|x+1|(x^2+4))+\frac{2}{x+1}-\frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$

問題 5.12 (1) $x+\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}+C$ (2) $\arctan\bigl(\frac{1+a}{1-a}\tan\frac{x}{2}\bigr)+\frac{x}{2}+C$
(3) $a=b$ のとき $\frac{1}{a}\tan\frac{x}{2}+C$，　$a>b$ のとき $\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\Bigl(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\Bigr)+C$，
$a<b$ のとき $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\left|\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}}\right|+C$

問題 5.13 (1) $\frac{1}{2}\bigl(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\bigr)+C$ (2) $\frac{1}{a}\log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+a^2}+a}+C$
(3) $-\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

問題 5.14 (1) 広義可積分である（$\frac{\cos x}{1+x}=\frac{1}{1+x}(\sin x)'$ と見て部分積分を用いよ）
(2) 広義可積分でない（$\int_0^{n\pi}\frac{x\sin^2 x}{1+x^2}dx\ge\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\int_{\frac{1}{4}\pi+(k-1)\pi}^{\frac{3}{4}\pi+(k-1)\pi}\frac{x}{1+x^2}dx\ge c\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\to\infty\ (n\to\infty)$）
(3) 広義可積分である（$\sin(x^2)=-\frac{1}{2x}(\cos(x^2))'$ と見て部分積分を用いよ）

問題 5.15 (1) 広義可積分でない（$\frac{1}{\log(x+e)}\ge\frac{e}{x+e}\ (x\ge 0)$ に注意せよ）
(2) 広義可積分である　(3) 広義可積分である

第６章　重積分

問題 6.1 (1) $\frac{3}{20}$ (2) $\frac{\pi}{2}$ (3) $\log\frac{3}{2}$

問題 6.2 (1) $\int_0^1\bigl(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}}f(x,y)dx\bigr)dy$ (2) $\int_0^a\bigl(\int_{y/2}^{y}f(x,y)dx\bigr)dy+\int_a^{2a}\bigl(\int_{y/2}^{a}f(x,y)dx\bigr)dy$
(3) $\int_{-a}^0\bigl(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)dy\bigr)dx+\int_0^a\bigl(\int_0^{a-x}f(x,y)dy\bigr)dx$

問題 6.3 (1) $\frac{a^4}{8}$ (2) $\frac{\pi}{4}(p+q)a^4$ (3) $\frac{32}{9}a^3$

第７章　級数と関数の極限

問題 7.2 (1) $\overline{\lim}\,a_n=+\infty$, $\underline{\lim}\,a_n=1$ (2) $\overline{\lim}\,a_n=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\underline{\lim}\,a_n=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

問題 7.4 (1) 収束する　(2) 収束する　(3) $+\infty$ に発散する（$\sqrt{1+n^2}-n\ge\frac{1}{3n}$ に注意せよ）

問題 7.5 (1) $\frac{1}{a}$ (2) $0<a<1$ のとき $+\infty$，$a=1$ のとき 1，$a>1$ のとき 0 (3) 1

問題 7.7 すべて極限関数 f は $f(x)=0$ となる． (1) 一様収束する（$|f_n(x)|\le(ne)^{-1}$）
(2) 一様収束しない（$f_n(\frac{1}{n})=ne^{-1}\to\infty\ (n\to\infty)$）
(3) 一様収束しない（$f_n(\frac{1}{n})=(1-\frac{1}{n})^n\to e^{-1}\ (n\to\infty)$）

問題 7.8 (1) $f(x)=1$ (2) $\int_0^1 f_n(x)dx=\log(1+\frac{1}{n})^n\to\log e=1\ (n\to\infty)$

問題 7.10 (1) 一様収束する　(2) 一様収束する　(3) 一様収束しない

索 引

た 行

な 行

は 行

ま 行

や 行

ら 行

欧 字