

1 \mathcal{F} を Fourier 変換とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 緩増加超関数 $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ に対して，次式が成り立つことを示せ．

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha \mathcal{F}[T] = \mathcal{F}[(-ix)^\alpha T], \quad \mathcal{F}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha T\right] = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}[T]$$

(2) $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ が連続写像であること，すなわち，

$$\lim_{j \rightarrow \infty} T_j = T \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \implies \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}[T_j] = \mathcal{F}[T] \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ は全単射であり，その逆写像 \mathcal{F}^{-1} は

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[T], \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}[\phi] \rangle \quad (\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n))$$

で与えられることを示せ．ただし， $\mathcal{F}^{-1}[\phi]$ は急減少関数に対する Fourier 変換であり，次の積分で与えられる．

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \phi(\xi) d\xi \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

レポート作成上の注意

- A 4 版のレポート用紙を使用し，表紙を付け，左上をホチキスで留めること．表紙には科目名，レポート番号，学籍番号，氏名を記入すること．
- 最終的な答えだけでなく，途中計算を分かりやすく説明すること．
- ワープロ， $\text{T}_\text{E}_\text{X}$ 等は使用せず，手書きで（丁寧な字で）作成すること．
- レポートは次回の講義終了後に回収する．

F D 授業アンケートについて（Web ページで行う）

- アンケート期間：1 月 8 日（火）午前 1 0 時～2 月 1 4 日（木）午後 7 時
- Web ページ URL：https://fd-enquete.st.keio.ac.jp/
- 注意：keio.jp の ID とパスワードが必要です。