問題 $4+\frac{1}{2}$ (数学A 3)　　May 16, 2012 (Wed.)

$\boxed{1}$ 以下の議論における間違いを指摘せよ．

$$a_1 = 4, \qquad a_{n+1} = a_n^2 - 6 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える．

まず，全ての自然数 n に対して

$$a_n \geq 4 \tag{2}$$

が成り立つことを示す．実際，$n = 1$ のときは $a_1 = 4$ より明らか．また，$n = k$ のとき (2) 式が成り立つと仮定すると，$a_k \geq 4$ より，$a_k^2 \geq 16$．それゆえ，

$$a_{k+1} = a_k^2 - 6 \geq 16 - 6 = 10 \geq 4$$

となり，$n = k + 1$ のときにも (2) 式が成り立つ．したがって，数学的帰納法により，任意の自然数 n に対して (2) 式が成り立つ．

次に，この数列 $\{a_n\}$ の極限を α としよう．すなわち，

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n \tag{3}$$

とする．(2) 式において $n \to \infty$ とすると，$\alpha \geq 4$ となり，特に

$$\alpha \geq 0 \tag{4}$$

が成り立つ．一方，(1) 式において $n \to \infty$ とすると，$\alpha = \alpha^2 - 6$ となり，この 2 次方程式を解くと $\alpha = -2, 3$ が得られる．これら 2 つの解のうち，条件 (4) 式を満たすのは $\alpha = 3$ のみである．

以上のことから，(1) 式で定まる数列 $\{a_n\}$ の極限は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$$

となる．