

1 \mathcal{F} を Fourier 変換とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 緩増加超関数 $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ に対して，次式が成り立つことを示せ．

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha \mathcal{F}[T] = \mathcal{F}[(-ix)^\alpha T], \quad \mathcal{F}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha T\right] = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}[T]$$

(2) $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ が連続写像であること，すなわち，

$$\lim_{j \rightarrow \infty} T_j = T \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \implies \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}[T_j] = \mathcal{F}[T] \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ は全単射であり，その逆写像 \mathcal{F}^{-1} は

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[T], \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}[\phi] \rangle \quad (\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n))$$

で与えられることを示せ．ただし， $\mathcal{F}^{-1}[\phi]$ は急減少関数に対する Fourier 変換であり，次の積分で与えられる．

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \phi(\xi) d\xi \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

2 \mathbf{R}^n 上の関数 $f(x)$ が $|x|$ にのみ依存するとき，すなわち，ある半直線 $[0, \infty)$ 上の関数 $\varphi(r)$ を用いて $f(x) = \varphi(|x|)$ と書けるときのとき，関数 $f(x)$ は球対称であるという．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) \mathbf{R}^n 上の関数 $f(x)$ が球対称であるための必要十分条件は，任意の $x \in \mathbf{R}^n$ および任意の $T \in O(n)$ に対して $f(Tx) = f(x)$ が成り立つこと，であることを示せ．ただし， $O(n)$ は n 次の直交群である．

(2) $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ が球対称であるとき， $f = f(x)$ の Fourier 変換 $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ もまた球対称であることを示せ．

レポート作成上の注意

- A 4 版のレポート用紙を使用し，表紙を付けること．表紙には科目名，レポート番号，学籍番号，氏名を記入すること．
- 最終的な答えだけでなく，途中計算を分かりやすく説明すること．
- ワードプロ，T E X 等は使用せず，手書きで（丁寧な字で）作成すること．
- レポートは次回（1月7日）の講義終了後に回収する．

F D 授業アンケートについて（Web ページで行う）

- アンケート期間：1月13日（金）午前10時～2月13日（月）午後7時
- Web ページ URL：https://fd-enquete.st.keio.ac.jp/
- 注意：keio.jp の ID とパスワードが必要です．