

1 次の熱方程式に対する Neumann 境界値問題を考える .

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < l \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

ただし, $f(x)$ は閉区間 $[0, l]$ 上で定義された連続関数とする . このとき, 以下の問いに答えよ .

- (1) Fourier の方法を用いて (1.1) の Fourier 級数解を, $f(x)$ の Fourier 係数 a_n, b_n を用いて書き下せ . ただし, 今の場合 $f(x)$ の Fourier 係数 a_n, b_n は次式で定められているとする .

$$a_n := \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad b_n := \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

- (2) 初期値 $f(x)$ は $[0, l]$ 上の C^1 級関数とする . このとき, (1.1) は $[0, l] \times [0, \infty)$ 上連続, $[0, l] \times (0, \infty)$ 上 C^∞ 級となる解 $u(x, t)$ を持つことを示せ . ただし, 周期境界条件の下での熱方程式の初期値問題の解の存在定理は用いてもよい (ヒント : 初期値を偶関数かつ $2l$ 周期関数となるように拡張せよ .)

レポート作成上の注意

- A 4 版のレポート用紙を使用し, 表紙を付けること (学事センターにある所定の表紙を使う必要はない .) 表紙には科目名, レポート番号, 学籍番号, 氏名, 所属学科を記入すること .
- 最終的な答えだけでなく, 途中計算を分かりやすく説明すること .
- ワードプロ, T E X 等は使用せず, 手書きで (丁寧な字で) 作成すること .
- レポートは次回の講義終了後に回収する .