レポート問題３ (数学解析第１)　　　　Apr. 30, 2008 (Wed.)

$\boxed{1}$ $\mathbf{R}^2$ 上の関数 $f = f(x,y)$ を

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - x^2 - xy - y^2 + x + y - 1$$

により定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $(x,y) = (1,1)$ の近傍で，方程式 $f(x,y) = 0$ により陰関数 $y = \varphi(x)$ が定めること（つまり，陰関数定理の仮定が満たされていること）を示し，$\varphi'(1)$ を求めよ．

(2) (1) の陰関数 $\varphi(x)$ を Taylor 展開して

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + O((x-1)^3) \qquad (x \to 1)$$

とするとき，係数 a_0, a_1, a_2 の値を求めよ．

$\boxed{2}$ $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ $\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})), \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n\big)$ および $\mathbf{g} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^l$ $\big(\mathbf{g}(\mathbf{y}) = (g_1(\mathbf{y}), \ldots, g_l(\mathbf{y})), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m\big)$ は C^1 級であるとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 合成関数 $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ の Jacobi 行列 $D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})$ に対して

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))D\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n = m = l$ のとき，合成関数 $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ の Jacobian $J_{\mathbf{g}\circ\mathbf{f}}$ に対して

$$J_{\mathbf{g}\circ\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$$

が成り立つことを示せ．

レポート作成上の注意

- Ａ４版のレポート用紙を使用し，表紙を付け，左上をホチキスで留めること．(学事センターにある所定の表紙を使う必要はない.）表紙には科目名，レポート番号，学籍番号，氏名，所属学科を記入すること．
- 最終的な答えだけでなく，途中計算を分かりやすく説明すること．
- ワープロ，ＴＥＸ等は使用せず，手書きで（丁寧な字で）作成すること．
- レポートは次回の講義終了後に回収する．