レポート問題１１ (関数方程式第１)　　　　Dec. 19, 2008 (Fri.)

$\boxed{1}$ $\mathscr{F}$ を Fourier 変換とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 緩増加超関数 $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ に対して，次式が成り立つことを示せ．

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\alpha} \mathscr{F}[T] = \mathscr{F}[(-ix)^{\alpha} T], \qquad \mathscr{F}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} T\right] = (i\xi)^{\alpha} \mathscr{F}[T]$$

(2) $\mathscr{F} : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ が連続写像であること，すなわち，

$$\lim_{j\to\infty} T_j = T \ \text{ in } \ \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{j\to\infty} \mathscr{F}[T_j] = \mathscr{F}[T] \ \text{ in } \ \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\mathscr{F} : \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ は全単射であり，その逆写像 $\mathscr{F}^{-1}$ は

$$\langle \mathscr{F}^{-1}[T], \phi \rangle = \langle T, \mathscr{F}^{-1}[\phi] \rangle \quad (\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n))$$

で与えられることを示せ．ただし，$\mathscr{F}^{-1}[\phi]$ は急減少関数に対する Fourier 変換であり，次の積分で与えられる．

$$\mathscr{F}^{-1}[\phi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi} \phi(\xi) d\xi \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

$\boxed{2}$ $\mathbf{R}^n$ 上の関数 $f(x)$ が $|x|$ にのみ依存するとき，すなわち，ある半直線 $[0, \infty)$ 上の関数 $\varphi(r)$ を用いて $f(x) = \varphi(|x|)$ と書けるとき，関数 $f(x)$ は球対称であるという．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbf{R}^n$ 上の関数 $f(x)$ が球対称であるための必要十分条件は，任意の $x \in \mathbf{R}^n$ および任意の $T \in O(n)$ に対して $f(Tx) = f(x)$ が成り立つこと，であることを示せ．ただし，$O(n)$ は n 次の直交群である．

(2) $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ が球対称であるとき，$f = f(x)$ の Fourier 変換 $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ もまた球対称であることを示せ．

レポート作成上の注意

- Ａ４版のレポート用紙を使用し，表紙を付けること．表紙には科目名，レポート番号，学籍番号，氏名を記入すること．
- 最終的な答えだけでなく，途中計算を分かりやすく説明すること．
- ワープロ，ＴＥＸ等は使用せず，手書きで（丁寧な字で）作成すること．
- レポートは次回（１月１６日）に回収する．

休講のお知らせ

１月９日（金）の関数方程式第１の講義は休講とします．

授業アンケートについて（Web ページで行う）

- アンケート期間：１月７日（水）午前１０時～２月１４日（土）午後７時
- Web ページ URL：https://fd-enquete.st.keio.ac.jp/
- 注意：keio.jp のＩＤとパスワードが必要です。